Método de Pendiente-Deflexión

VIGA

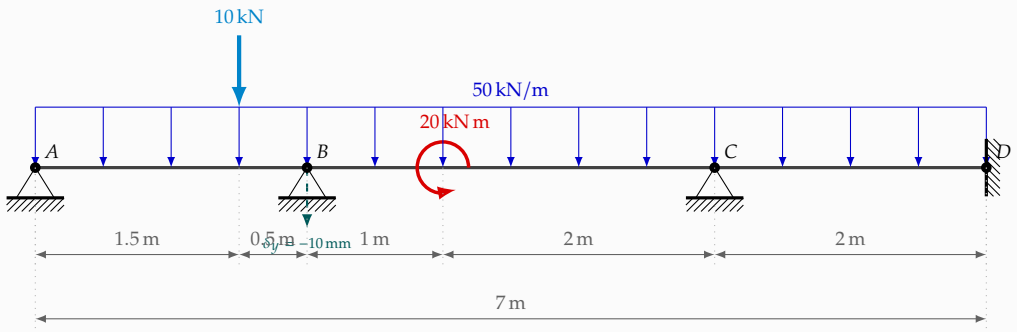
EMI · *solución paso a paso*

Unidades de trabajo: L [m] F [kN] M [kN m] q [kN/m] δ [mm] E [kN/m^2] A [m^2] I [m^4]

Ecuación fundamental del método (convención antihoraria positiva, la misma del solver matricial):

$$\hat{M}_{ij} = M_{ij}^{\text{MEP}} + \frac{2EI}{L}\left(2\theta_i + \theta_j - 3\psi_{ij}\right)$$

donde θ son los giros de los nudos y ψ_{ij} la rotación de cuerda de la barra, con dos orígenes posibles: un asentamiento de apoyo **prescrito** (ψ_{ij}^0, conocido antes de resolver nada) y la traslación de un mecanismo de la estructura (Δ_{ij}, incógnita): $\psi_{ij} = \psi_{ij}^0 + \Delta_{ij}$.



Estructura analizada.

Paso 1 Grados de libertad

Giros incógnita (todo nudo que no esté empotrado ni guiado):

$$\theta_A,\ \theta_B,\ \theta_C$$



Giros incógnita en cada nudo (sentido antihorario positivo).

No existen modos de traslación compatibles con los apoyos y la inextensibilidad de las barras: $\Delta_{ij} = 0$ en todas las barras (estructura sin desplazamiento lateral por mecanismo). **Asen-**

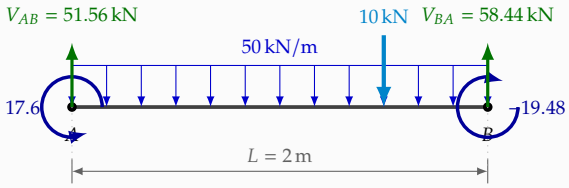
tamientos de apoyo. Un asentamiento impone un desplazamiento *conocido* del apoyo ($\delta \uparrow +$, igual convenio que v en el matricial); la rotación de cuerda que produce en cada barra, $\psi^0_{ij} = (v_j - v_i)/L$, no es incógnita: se conoce antes de plantear ninguna ecuación y entra en la fórmula fundamental junto al MEP.

Apoyo	δ_y (mm)	$v = \delta_y$ (m)
B	−10	−0.01

Rotación de cuerda por asentamiento en cada barra afectada: $\psi^0_{AB} = \dfrac{v_B - v_A}{L_{AB}} = -0.005$, $\psi^0_{BC} = \dfrac{v_C - v_B}{L_{BC}} = 0.003333$

Paso 2 Rigideces y momentos de empotramiento perfecto

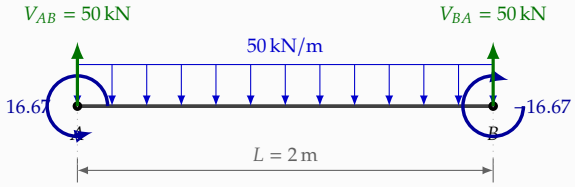
Barra A–B



Cuerpo libre de A–B biempotrada: las cargas del vano, los MEP y las reacciones de empotramiento que las equilibran (antihorario y $+y'$ positivos).

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2(20000)}{2} = 20000 \text{ kN m}$$

El vano lleva 2 acciones. Se halla el MEP de cada una por separado y se **superponen** (el problema es lineal).



Cuerpo libre de A–B con solo la acción 1: su MEP y su reacción de empotramiento.

Acción 1: carga repartida.
Componente que flexiona. Solo la parte *perpendicular* al eje produce MEP; $w > 0$ es la que empuja hacia el lado $-y'$ local, es decir hacia la derecha del sentido de recorrido $A \to B$ (hacia abajo en un vano horizontal recorrido de izquierda a derecha). La carga ya es perpendicular

a la barra (tipo 1). **Fórmula** (carga uniforme w sobre todo el vano biempotrado):

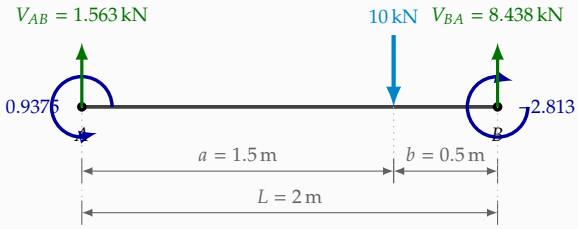
$$\mathrm{MEP}_{AB}^{(1)} = +\frac{wL^2}{12}, \qquad \mathrm{MEP}_{BA}^{(1)} = -\frac{wL^2}{12}$$

Reemplazo con $w = 50$ kN/m y $L = 2$ m:

$$\mathrm{MEP}_{AB}^{(1)} = +\frac{(50)(2)^2}{12}, \qquad \mathrm{MEP}_{BA}^{(1)} = -\frac{(50)(2)^2}{12}$$

Resultado de la acción 1:

$$\boxed{\mathrm{MEP}_{AB}^{(1)} = 16.67\ \mathrm{kN\,m}}, \qquad \boxed{\mathrm{MEP}_{BA}^{(1)} = -16.67\ \mathrm{kN\,m}}$$



Cuerpo libre de A–B con solo la acción 2: su MEP y su reacción de empotramiento.

Acción 2: fuerza puntual de 10 kN a $x = 1.5$ m de A.
Componente perpendicular al eje: $P = 10$ kN; distancias a los extremos $a = 1.5$ y $b = L - a = 0.5$ m. **Fórmula** (carga puntual sobre vano biempotrado):

$$\mathrm{MEP}_{AB}^{(2)} = +\frac{P\,a\,b^2}{L^2}, \qquad \mathrm{MEP}_{BA}^{(2)} = -\frac{P\,a^2 b}{L^2}$$

Reemplazo:

$$\mathrm{MEP}_{AB}^{(2)} = +\frac{(10)(1.5)(0.5)^2}{(2)^2}, \qquad \mathrm{MEP}_{BA}^{(2)} = -\frac{(10)(1.5)^2(0.5)}{(2)^2}$$

Resultado de la acción 2:

$$\boxed{\mathrm{MEP}_{AB}^{(2)} = 0.9375\ \mathrm{kN\,m}}, \qquad \boxed{\mathrm{MEP}_{BA}^{(2)} = -2.813\ \mathrm{kN\,m}}$$

Superposición de las 2 acciones:

$$\mathrm{MEP}_{AB} = (16.67) + (0.9375) = \boxed{17.6\ \mathrm{kN\,m}}$$

$$\mathrm{MEP}_{BA} = (-16.67) + (-2.813) = \boxed{-19.48\ \mathrm{kN\,m}}$$

Reacciones de empotramiento (cortantes). Las filas de traslación de f'_{eq}: la fuerza transversal con la que cada empotramiento sostiene el vano, positiva en sentido contrario a la carga (hacia $+y'$ del recorrido $A \to B$). **Fórmula** (carga uniforme sobre todo el vano):

$$V_{AB}^{(1)} = V_{BA}^{(1)} = \frac{wL}{2}$$

Reemplazo:

$$V_{AB}^{(1)} = V_{BA}^{(1)} = \frac{(50)(2)}{2}$$

Resultado de la acción 1:

$$\boxed{V_{AB}^{(1)} = 50 \text{ kN}}, \qquad \boxed{V_{BA}^{(1)} = 50 \text{ kN}}$$

Fórmula (carga puntual a $a = 1.5$ y $b = 0.5$ m):

$$V_{AB}^{(2)} = \frac{P\,b^2(3a+b)}{L^3}, \qquad V_{BA}^{(2)} = \frac{P\,a^2(a+3b)}{L^3}$$

Reemplazo:

$$V_{AB}^{(2)} = \frac{(10)(0.5)^2\big(3(1.5)+0.5\big)}{(2)^3}, \qquad V_{BA}^{(2)} = \frac{(10)(1.5)^2\big(1.5+3(0.5)\big)}{(2)^3}$$

Resultado de la acción 2:

$$\boxed{V_{AB}^{(2)} = 1.563 \text{ kN}}, \qquad \boxed{V_{BA}^{(2)} = 8.438 \text{ kN}}$$

Superposición:

$$V_{AB} = (50) + (1.563) = \boxed{51.56 \text{ kN}}$$

$$V_{BA} = (50) + (8.438) = \boxed{58.44 \text{ kN}}$$

Comprobación: las dos reacciones tienen que sumar la resultante transversal del vano:

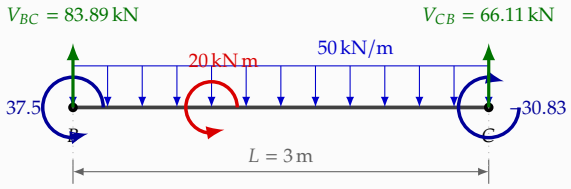
$$V_{AB} + V_{BA} = 51.56 + (58.44) = 110 \text{ kN} \checkmark$$

Y los dos MEP, con el momento de las cargas del vano respecto a B (M_q), tienen que equilibrar el cortante multiplicado por la luz:

$$\text{MEP}_{AB} + \text{MEP}_{BA} + M_q = 17.6 + (-19.48) + (105) = 103.1$$

$$V_{AB} \cdot L = (51.56)(2) = 103.1 \checkmark$$

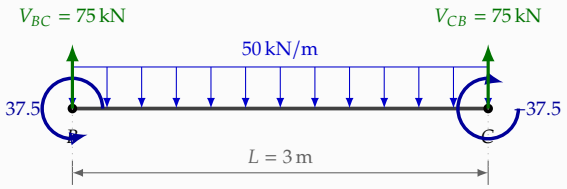
Barra B–C



Cuerpo libre de B–C biempotrada: las cargas del vano, los MEP y las reacciones de empotramiento que las equilibran (antihorario y $+y'$ positivos).

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2(20000)}{3} = 13330 \text{ kN m}$$

El vano lleva 2 acciones. Se halla el MEP de cada una por separado y se **superponen** (el problema es lineal).



Cuerpo libre de B–C con solo la acción 1: su MEP y su reacción de empotramiento.

Acción 1: carga repartida.

Componente que flexiona. Solo la parte *perpendicular* al eje produce MEP; $w > 0$ es la que empuja hacia el lado $-y'$ local, es decir hacia la derecha del sentido de recorrido $B \to C$ (hacia abajo en un vano horizontal recorrido de izquierda a derecha). La carga ya es perpendicular a la barra (tipo 1). **Fórmula** (carga uniforme w sobre todo el vano biempotrado):

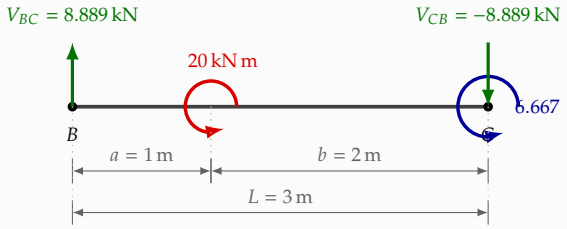
$$\text{MEP}_{BC}^{(1)} = +\frac{wL^2}{12}, \qquad \text{MEP}_{CB}^{(1)} = -\frac{wL^2}{12}$$

Reemplazo con $w = 50$ kN/m y $L = 3$ m:

$$\text{MEP}_{BC}^{(1)} = +\frac{(50)(3)^2}{12}, \qquad \text{MEP}_{CB}^{(1)} = -\frac{(50)(3)^2}{12}$$

Resultado de la acción 1:

$$\boxed{\text{MEP}_{BC}^{(1)} = 37.5 \text{ kN m}}, \qquad \boxed{\text{MEP}_{CB}^{(1)} = -37.5 \text{ kN m}}$$



Cuerpo libre de B–C con solo la acción 2: su MEP y su reacción de empotramiento.

Acción 2: momento concentrado de 20 kN m a $x = 1$ m de B.

Momento aplicado $M_0 = 20$ kN m (antihorario positivo), con $a = 1$ y $b = 2$ m. **Fórmula** (momento concentrado sobre vano biempotrado):

$$\text{MEP}_{BC}^{(2)} = \frac{M_0\, b\,(2a - b)}{L^2}, \qquad \text{MEP}_{CB}^{(2)} = \frac{M_0\, a\,(2b - a)}{L^2}$$

Reemplazo:

$$\text{MEP}_{BC}^{(2)} = \frac{(20)(2)\big(2(1)-2\big)}{(3)^2}, \qquad \text{MEP}_{CB}^{(2)} = \frac{(20)(1)\big(2(2)-1\big)}{(3)^2}$$

Resultado de la acción 2:

$$\boxed{\text{MEP}_{BC}^{(2)} = 0\ \text{kN m}}, \qquad \boxed{\text{MEP}_{CB}^{(2)} = 6.667\ \text{kN m}}$$

Superposición de las 2 acciones:

$$\text{MEP}_{BC} = (37.5) + (0) = \boxed{37.5\ \text{kN m}}$$

$$\text{MEP}_{CB} = (-37.5) + (6.667) = \boxed{-30.83\ \text{kN m}}$$

Reacciones de empotramiento (cortantes). Las filas de traslación de f'_{eq}: la fuerza transversal con la que cada empotramiento sostiene el vano, positiva en sentido contrario a la carga (hacia $+y'$ del recorrido $B \to C$). **Fórmula** (carga uniforme sobre todo el vano):

$$V_{BC}^{(1)} = V_{CB}^{(1)} = \frac{wL}{2}$$

Reemplazo:

$$V_{BC}^{(1)} = V_{CB}^{(1)} = \frac{(50)(3)}{2}$$

Resultado de la acción 1:

$$\boxed{V_{BC}^{(1)} = 75\ \text{kN}}, \qquad \boxed{V_{CB}^{(1)} = 75\ \text{kN}}$$

Fórmula (momento concentrado): el par no aporta resultante, así que los dos cortantes son iguales y opuestos.

$$V_{BC}^{(2)} = \frac{6M_0\, a\, b}{L^3}, \qquad V_{CB}^{(2)} = -V_{BC}^{(2)}$$

Reemplazo:

$$V_{BC}^{(2)} = \frac{6(20)(1)(2)}{(3)^3}, \qquad V_{CB}^{(2)} = -V_{BC}^{(2)}$$

Resultado de la acción 2:

$$\boxed{V_{BC}^{(2)} = 8.889\ \text{kN}}, \qquad \boxed{V_{CB}^{(2)} = -8.889\ \text{kN}}$$

Superposición:

$$V_{BC} = (75) + (8.889) = \boxed{83.89\ \text{kN}}$$

$$V_{CB} = (75) + (-8.889) = \boxed{66.11 \text{ kN}}$$

Comprobación: las dos reacciones tienen que sumar la resultante transversal del vano:

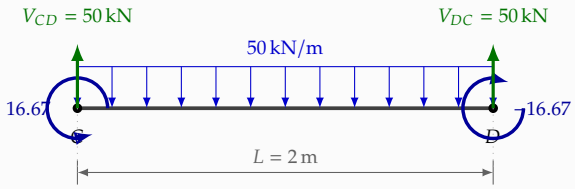
$$V_{BC} + V_{CB} = 83.89 + (66.11) = 150 \text{ kN} \checkmark$$

Y los dos MEP, con el momento de las cargas del vano respecto a C (M_q), tienen que equilibrar el cortante multiplicado por la luz:

$$\text{MEP}_{BC} + \text{MEP}_{CB} + M_q = 37.5 + (-30.83) + (245) = 251.7$$

$$V_{BC} \cdot L = (83.89)(3) = 251.7 \checkmark$$

Barra C–D



Cuerpo libre de C–D biempotrada: las cargas del vano, los MEP y las reacciones de empotramiento que las equilibran (antihorario y $+y'$ positivos).

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2(20000)}{2} = 20000 \text{ kN m}$$

Componente que flexiona. Solo la parte *perpendicular* al eje produce MEP; $w > 0$ es la que empuja hacia el lado $-y'$ local, es decir hacia la derecha del sentido de recorrido $C \to D$ (hacia abajo en un vano horizontal recorrido de izquierda a derecha). La carga ya es perpendicular a la barra (tipo 1).

$$\text{MEP}_{CD} = +\frac{wL^2}{12} = +\frac{(50)(2)^2}{12} = \mathbf{16.67} \text{ kN m}$$

$$\text{MEP}_{DC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{(50)(2)^2}{12} = \mathbf{-16.67} \text{ kN m}$$

Reacciones de empotramiento (cortantes). Las filas de traslación de f'_{eq}: la fuerza transversal con la que cada empotramiento sostiene el vano, positiva en sentido contrario a la carga (hacia $+y'$ del recorrido $C \to D$).

$$V_{CD} = V_{DC} = \frac{wL}{2} = \frac{(50)(2)}{2} = \mathbf{50} \text{ kN}$$

Comprobación: las dos reacciones tienen que sumar la resultante transversal del vano:

$$V_{CD} + V_{DC} = 50 + (50) = 100 \text{ kN} \checkmark$$

Y los dos MEP, con el momento de las cargas del vano respecto a D (M_q), tienen que equilibrar el cortante multiplicado por la luz:

$$\text{MEP}_{CD} + \text{MEP}_{DC} + M_q = 16.67 + (-16.67) + (100) = 100$$

$$V_{CD} \cdot L = (50)(2) = 100 \checkmark$$

Paso 3 Ecuaciones de pendiente-deflexión de cada barra

EI es constante en toda la estructura, así que las rigideces se expresan simbólicamente como $k = EI/L$. Se escribe un $\hat{M}_{ij}$ por cada extremo de barra.

Fórmula:

$$\boxed{\hat{M}_{ij} = 2k_{ij}\left(2\theta_i + \theta_j - 3\Delta_{ij}\right) + M_{ij}^{\text{MEP}} - 6k_{ij}\psi_{ij}^{0}}$$

donde Δ_{ij} es la rotación de cuerda por *modo de traslación* de la barra, nula aquí porque ningún extremo de barra se traslada, y ψ_{ij}^{0} la del paso 1 por *asentamiento de apoyo* (conocida, distinta de Δ_{ij}: no sale del sistema de equilibrio). Los MEP son los del paso 2, en kN m.

Barra	L (m)	$k_{ij} = EI/L$	Valor (kN m)
k_{AB}	2	$\frac{EI}{2}$	10000 kN m
k_{BC}	3	$\frac{EI}{3}$	6667 kN m
k_{CD}	2	$\frac{EI}{2}$	10000 kN m

Tramo AB

$$\psi^0_{AB} = -0.005 \quad \text{(asentamiento, paso 1)}$$

- $\hat{M}_{AB} = 2k_{AB}\,(2\theta_A + \theta_B - 3\cdot 0) + M^{\text{MEP}}_{AB} - 6k_{AB}\psi^0_{AB}$

$$\hat{M}_{AB} = \frac{2EI}{2}\,(2\theta_A + \theta_B) + 17.6 + 300$$

$$\hat{M}_{AB} = \frac{4EI}{2}\theta_A + \frac{2EI}{2}\theta_B + 17.6 + 300$$

- $\hat{M}_{BA} = 2k_{AB}\,(2\theta_B + \theta_A - 3\cdot 0) + M^{\text{MEP}}_{BA} - 6k_{AB}\psi^0_{BA}$

$$\hat{M}_{BA} = \frac{2EI}{2}\,(2\theta_B + \theta_A) - 19.48 + 300$$

$$\hat{M}_{BA} = \frac{4EI}{2}\theta_B + \frac{2EI}{2}\theta_A - 19.48 + 300$$

Tramo BC

$$\psi^0_{BC} = 0.003333 \quad \text{(asentamiento, paso 1)}$$

- $\hat{M}_{BC} = 2k_{BC}\,(2\theta_B + \theta_C - 3\cdot 0) + M^{\text{MEP}}_{BC} - 6k_{BC}\psi^0_{BC}$

$$\hat{M}_{BC} = \frac{2EI}{3}\,(2\theta_B + \theta_C) + 37.5 - 133.3$$

$$\hat{M}_{BC} = \frac{4EI}{3}\theta_B + \frac{2EI}{3}\theta_C + 37.5 - 133.3$$

- $\hat{M}_{CB} = 2k_{BC}\,(2\theta_C + \theta_B - 3\cdot 0) + M^{\text{MEP}}_{CB} - 6k_{BC}\psi^0_{CB}$

$$\hat{M}_{CB} = \frac{2EI}{3}\,(2\theta_C + \theta_B) - 30.83 - 133.3$$

$$\hat{M}_{CB} = \frac{4EI}{3}\theta_C + \frac{2EI}{3}\theta_B - 30.83 - 133.3$$

Tramo CD

- $\hat{M}_{CD} = 2k_{CD}\,(2\theta_C + 0 - 3\cdot 0) + M^{\text{MEP}}_{CD}$

$$\hat{M}_{CD} = \frac{4EI}{2}\theta_C + 16.67$$

- $\hat{M}_{DC} = 2k_{CD}\,(2\cdot 0 + \theta_C - 3\cdot 0) + M^{\text{MEP}}_{DC}$

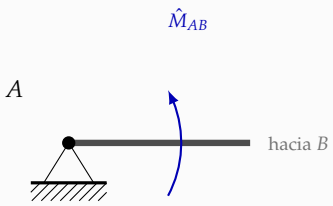
$$\hat{M}_{DC} = \frac{2EI}{2}\theta_C - 16.67$$

Paso 4 Ecuaciones de equilibrio

En cada nudo con giro incógnita, los momentos de extremo de las barras que concurren deben equilibrar el momento exterior aplicado. En las figuras se dibujan en su sentido

positivo (antihorario).

Nudo A (apoyo simple extremo):



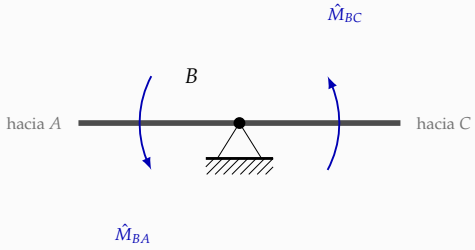
Momentos de extremo que concurren en el nudo A.

$$\hat{M}_{AB} = 0\ \text{kN m}$$

$$\rightarrow (4k_{AB}\theta_A + 2k_{AB}\theta_B + 317.6) = 0$$

$$\rightarrow 4k_{AB}\theta_A + 2k_{AB}\theta_B = -317.6 \ \ldots \ \text{(I)}$$

Nudo B (interior):



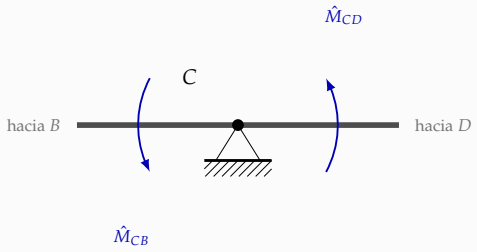
Momentos de extremo que concurren en el nudo B.

$$\hat{M}_{BA} + \hat{M}_{BC} = 0\ \text{kN m}$$

$$\rightarrow (4k_{AB}\theta_B + 2k_{AB}\theta_A + 280.5) + (4k_{BC}\theta_B + 2k_{BC}\theta_C - 95.83) = 0$$

$$\rightarrow 2k_{AB}\theta_A + (4k_{AB} + 4k_{BC})\,\theta_B + 2k_{BC}\theta_C = -184.7 \ \ldots \ \text{(II)}$$

Nudo C (interior):



Momentos de extremo que concurren en el nudo C.

$$\hat{M}_{CB} + \hat{M}_{CD} = 0\ \text{kN m}$$

$$\rightarrow (4k_{BC}\theta_C + 2k_{BC}\theta_B - 164.2) + (4k_{CD}\theta_C + 16.67) = 0$$

$$\rightarrow 2k_{BC}\theta_B + (4k_{BC} + 4k_{CD})\,\theta_C = 147.5 \ \ldots \ \text{(III)}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$40000\theta_A + 20000\theta_B = -317.6 \ \ldots \ \text{(I)}$$

$$20000\theta_A + 66670\theta_B + 13330\theta_C = -184.7 \ \ldots \ \text{(II)}$$

$$13330\theta_B + 66670\theta_C = 147.5 \ \ldots \ \text{(III)}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 40000 & 20000 & 0 \\ 20000 & 66670 & 13330 \\ 0 & 13330 & 66670 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -317.6 \\ -184.7 \\ 147.5 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{-148.5\ \text{kN m}^2}{EI} \\ &= \frac{-148.5\ \text{kN m}^2}{(200\ \text{GPa})\,(1 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^4)} \\ &= \frac{-148.5\ \text{kN m}^2}{20000\ \text{kN m}^2} \\ &= -0.007427\ \text{rad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{-20.51\ \text{kN m}^2}{EI} \\ &= \frac{-20.51\ \text{kN m}^2}{(200\ \text{GPa})\,(1 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^4)} \\ &= \frac{-20.51\ \text{kN m}^2}{20000\ \text{kN m}^2} \\ &= -0.001026\ \text{rad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_C &= \frac{48.35\ \text{kN m}^2}{EI} \\ &= \frac{48.35\ \text{kN m}^2}{(200\ \text{GPa})\,(1 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^4)} \\ &= \frac{48.35\ \text{kN m}^2}{20000\ \text{kN m}^2} \\ &= 0.002418\ \text{rad} \end{aligned}$$

Paso 5 Cálculo de momentos finales

Se sustituyen los giros θ resueltos en las ecuaciones de pendiente-deflexión para obtener los momentos finales en cada extremo de barra.

Fórmula:

$$\hat{M}_{ij} = 2k_{ij}\left(2\theta_i + \theta_j - 3\psi_{ij}\right) + M_{ij}^{\text{MEP}}$$

Cálculo: Sustituyendo los giros obtenidos: $\theta_A = -0.007427$ rad, $\theta_B = -0.001026$ rad, $\theta_C = 0.002418$ rad y las rotaciones de cuerda $\psi_{ij} = \psi_{ij}^0 + \Delta_{ij}$ de los pasos 1 y 3.

Tramo AB

$\hat{M}_{AB} = 2(10000)\,(2(-0.007427) + (-0.001026) - 3(-0.005)) + 17.6$

$$\rightarrow \hat{M}_{AB} = -17.6 + 17.6$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{AB} = 0 \text{ kN m}}$$

$\hat{M}_{BA} = 2(10000)\,(2(-0.001026) + (-0.007427) - 3(-0.005)) - 19.48$

$$\rightarrow \hat{M}_{BA} = 110.4 - 19.48$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{BA} = 90.95 \text{ kN m}}$$

Tramo BC

$\hat{M}_{BC} = 2(6667)\,(2(-0.001026) + (0.002418) - 3(0.003333)) + 37.5$

$$\rightarrow \hat{M}_{BC} = -128.4 + 37.5$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{BC} = -90.95 \text{ kN m}}$$

$\hat{M}_{CB} = 2(6667)\,(2(0.002418) + (-0.001026) - 3(0.003333)) - 30.83$

$$\rightarrow \hat{M}_{CB} = -82.54 - 30.83$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{CB} = -113.4 \text{ kN m}}$$

Tramo CD

$$\hat{M}_{CD} = 2(10000)\,(2(0.002418) + (0)) + 16.67$$

$$\rightarrow \hat{M}_{CD} = 96.71 + 16.67$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{CD} = 113.4 \text{ kN m}}$$

$$\hat{M}_{DC} = 2(10000)\,(2(0) + (0.002418)) - 16.67$$

$$\rightarrow \hat{M}_{DC} = 48.35 - 16.67$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{DC} = 31.69 \text{ kN m}}$$

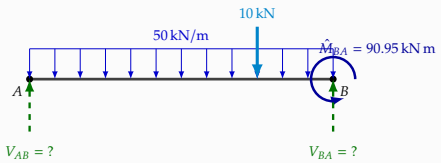
Comparación con el método matricial de rigidez:

Extremo (kN m)	P.–Deflexión	Matricial	Dif.
$\hat{M}_{AB}$	0	0	0
$\hat{M}_{BA}$	90.95	90.95	$4.312 \cdot 10^{-7}$
$\hat{M}_{BC}$	−90.95	−90.95	$-4.312 \cdot 10^{-7}$
$\hat{M}_{CB}$	−113.4	−113.4	$-7.532 \cdot 10^{-7}$
$\hat{M}_{CD}$	113.4	113.4	$7.532 \cdot 10^{-7}$
$\hat{M}_{DC}$	31.69	31.69	$1.153 \cdot 10^{-6}$

Paso 6 Determinación de las reacciones

Con los momentos de extremo ya conocidos, cada tramo se aísla como cuerpo libre y sus dos cortantes salen de la estática.

Tramo AB



Cuerpo libre del tramo AB: cargas del vano (rojo), momentos de extremo ya calculados $\hat{M}_{AB}$ y $\hat{M}_{BA}$ (azul, kN m, antihorario positivo) y los cortantes incógnita V_{AB} y V_{BA} (verde a trazos, dibujados en el sentido local $+y'$, aquí hacia arriba que suponen las ecuaciones).

Equilibrio estático del tramo aislado, con $L = 2$ m.

Fórmula:

$$\sum M_j = 0 \;\Rightarrow\; V_{ij} = \frac{\hat{M}_{ij} + \hat{M}_{ji} + M_q}{L}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; V_{ji} = -R_q - V_{ij}$$

Cálculo: Cargas del vano: resultante $R_q = -110$ kN y momento respecto a B: $M_q = 105$ kN m.

$$(\circlearrowleft +)\ \textstyle\sum M_B = 0 \quad\Rightarrow\quad -V_{AB}(2) + 0 + 90.95 + 105 = 0 \quad \text{... (I)}$$

$$(\uparrow +)\ \textstyle\sum F_y = 0 \quad\Rightarrow\quad V_{AB} + V_{BA} + (-110) = 0 \quad \text{... (II)}$$

Resolviendo (I) y (II) obtenemos:

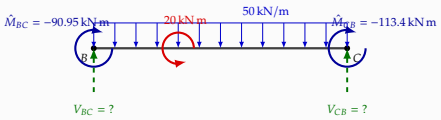
$$\Rightarrow\quad V_{AB} = \frac{0 + 90.95 + 105}{2}$$

$$\Rightarrow\quad V_{AB} = \boxed{97.97 \text{ kN}}$$

$$\Rightarrow\quad V_{BA} = 110 - 97.97$$

$$\Rightarrow\quad V_{BA} = \boxed{12.03 \text{ kN}}$$

Tramo BC



Cuerpo libre del tramo BC: cargas del vano (rojo), momentos de extremo ya calculados $\hat{M}_{BC}$ y $\hat{M}_{CB}$ (azul, kN m, antihorario positivo) y los cortantes incógnita V_{BC} y V_{CB} (verde a trazos, dibujados en el sentido local $+y'$, aquí hacia arriba que suponen las ecuaciones).

Equilibrio estático del tramo aislado, con $L = 3$ m.

Fórmula:

$$\sum M_j = 0 \;\Rightarrow\; V_{ij} = \frac{\hat{M}_{ij} + \hat{M}_{ji} + M_q}{L}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; V_{ji} = -R_q - V_{ij}$$

Cálculo: Cargas del vano: resultante $R_q = -150$ kN y momento respecto a C: $M_q = 245$ kN m.

$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_C = 0 \quad\Rightarrow\quad -V_{BC}(3) + (-90.95) + (-113.4) + 245 = 0 \quad \text{... (I)}$$

$$(\uparrow +)\ \sum F_y = 0 \quad\Rightarrow\quad V_{BC} + V_{CB} + (-150) = 0 \quad \text{... (II)}$$

Resolviendo (I) y (II) obtenemos:

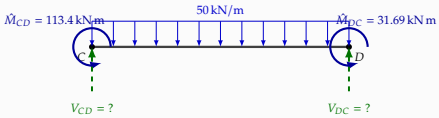
$$\Rightarrow \quad V_{BC} = \frac{(-90.95) + (-113.4) + 245}{3}$$

$$\Rightarrow \quad V_{BC} = \boxed{13.56 \text{ kN}}$$

$$\Rightarrow \quad V_{CB} = 150 - 13.56$$

$$\Rightarrow \quad V_{CB} = \boxed{136.4 \text{ kN}}$$

Tramo CD



Cuerpo libre del tramo CD: cargas del vano (rojo), momentos de extremo ya calculados $\hat{M}_{CD}$ y $\hat{M}_{DC}$ (azul, kN m, antihorario positivo) y los cortantes incógnita V_{CD} y V_{DC} (verde a trazos, dibujados en el sentido local $+y'$, aquí hacia arriba que suponen las ecuaciones).

Equilibrio estático del tramo aislado, con $L = 2$ m.

Fórmula:

$$\sum M_j = 0 \;\Rightarrow\; V_{ij} = \frac{\hat{M}_{ij} + \hat{M}_{ji} + M_q}{L}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; V_{ji} = -R_q - V_{ij}$$

Cálculo: Cargas del vano: resultante $R_q = -100$ kN y momento respecto a D: $M_q = 100$ kN m.

$$(\circlearrowleft +)\ \textstyle\sum M_D = 0 \quad\Rightarrow\quad -V_{CD}(2) + 113.4 + 31.69 + 100 = 0 \quad \text{... (I)}$$

$$(\uparrow +)\ \textstyle\sum F_y = 0 \quad\Rightarrow\quad V_{CD} + V_{DC} + (-100) = 0 \quad \text{... (II)}$$

Resolviendo (I) y (II) obtenemos:

$$\Rightarrow \quad V_{CD} = \frac{113.4 + 31.69 + 100}{2}$$

$$\Rightarrow \quad V_{CD} = \boxed{122.5 \text{ kN}}$$

$$\Rightarrow \quad V_{DC} = 100 - 122.5$$

$$\Rightarrow \quad V_{DC} = \boxed{-22.53 \text{ kN}}$$

Reacciones totales en apoyos

Suma de las contribuciones de todos los tramos adyacentes a cada apoyo.

Fórmula:

$$R_{\text{nudo}} = \sum_{\text{tramos}} V_{\text{tramo,nudo}}$$

Cálculo: Reacciones en apoyos:

$$A_y = V_{AB} = \boxed{97.97 \text{ kN}}$$

$$B_y = V_{BA} + V_{BC} = 12.03 + 13.56 = \boxed{25.59 \text{ kN}}$$

$$C_y = V_{CB} + V_{CD} = 136.4 + 122.5 = \boxed{259 \text{ kN}}$$

$$D_y = V_{DC} = \boxed{-22.53 \text{ kN}}$$

Momentos de reacción en los empotramientos (el momento de extremo de la barra que llega, descontado el momento aplicado en el nudo):

$$M_D = \hat{M}_{DC} = \boxed{31.69\ \text{kN m}}$$

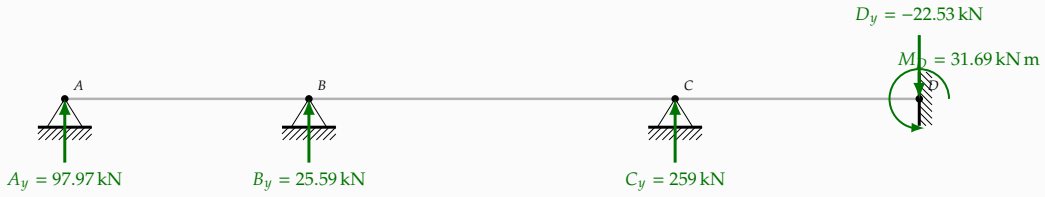
Comparación con el método matricial de rigidez:

Apoyo	$\cdot_y$ por equilibrio (kN)	$\cdot_y$ matricial (kN)	Dif.
A	97.97	97.97	$2.156 \cdot 10^{-7}$
B	25.59	25.59	$-6.104 \cdot 10^{-7}$
C	259	259	$1.348 \cdot 10^{-6}$
D	−22.53	−22.53	$-9.529 \cdot 10^{-7}$

Reacciones completas del solver (incluidas las componentes horizontales):

Nodo	$\cdot_x$ (kN)	$\cdot_y$ (kN)	$M_\cdot$ (kN m)
A	0	97.97	0
B	0	25.59	0
C	0	259	0
D	0	−22.53	31.69

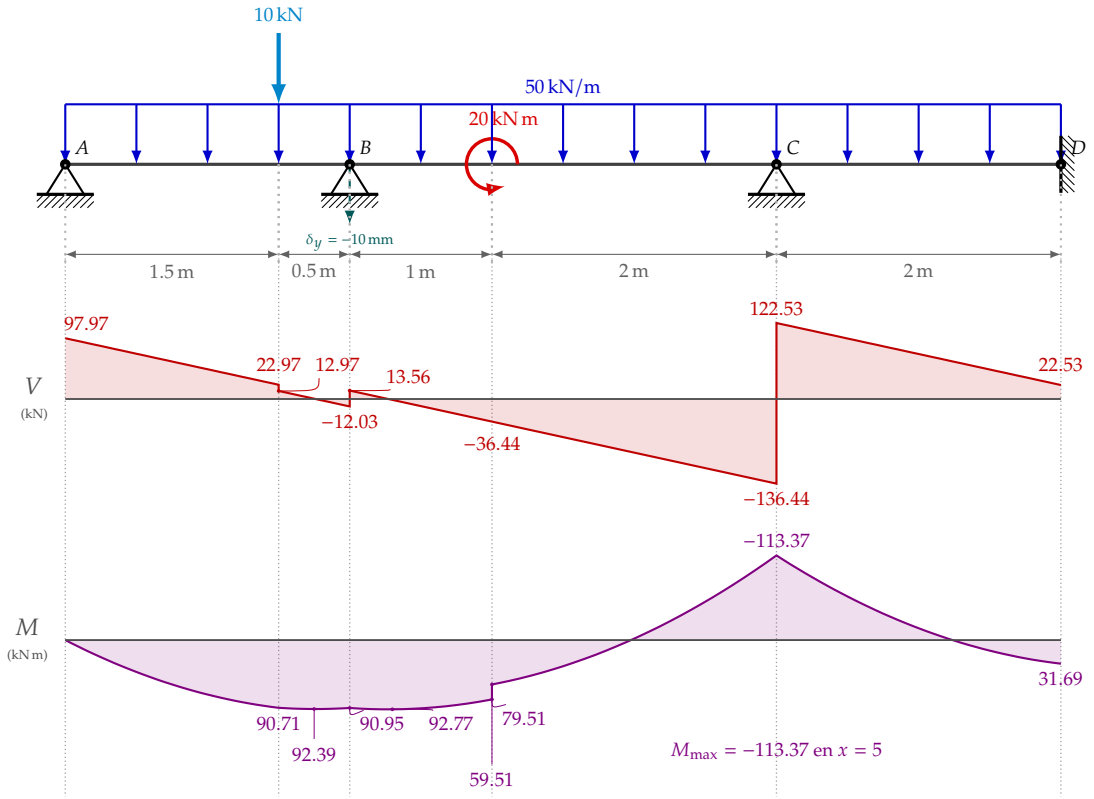
Cada fila es un nudo: las suyas son A_x (horizontal), A_y (vertical) y M_A (momento) si el nudo se llama A.

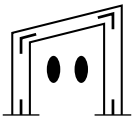


Reacciones en los apoyos.

Diagramas de fuerzas internas

Esfuerzo axial N, fuerza cortante V y momento flector M





Generado con EMI: calculadora estructural online: emiestruc.com