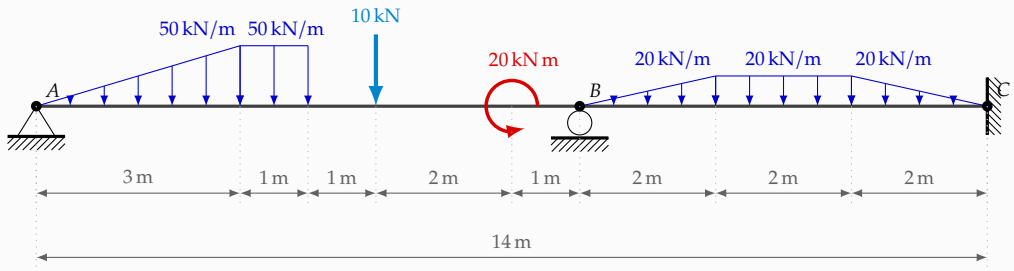
Teorema de los Tres Momentos (Clapeyron)

VIGA CONTINUA

EMI · *solución paso a paso*

Unidades de trabajo: L [m] F [kN] M [kN m] q [kN/m] δ [mm] E [kN/m^2] A [m^2] I [m^4]

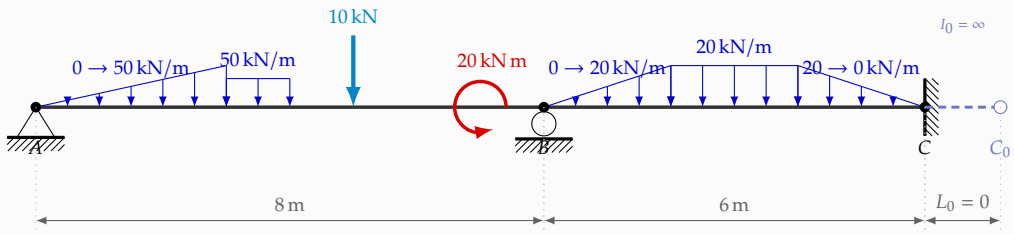
Incógnitas: momentos flectores $\bar{M}_i$ en los apoyos (convenio de flexión, positivo con fibra inferior traccionada).



Viga continua y numeración de apoyos.

Viga de cálculo

Las ecuaciones no se escriben sobre la viga tal como se dibujó, sino sobre esta, que incorpora el tramo ficticio de luz nula ($L_0 = 0$, $I_0 = \infty$) con el que se escribe la ecuación del empotramiento:



Viga de cálculo de Clapeyron: en azul, el tramo ficticio de luz nula del extremo empotrado.

El tramo ficticio no cambia la viga: con $L_0 = 0$ e $I_0 = \infty$ su rigidez a giro es infinita, que es justo lo que hace un empotramiento, y su coeficiente $c_0 = L_0/EI_0 = 0$ anula todos los términos que aporta a la ecuación, salvo el que hace falta: el que empareja $\bar{M}$ del empotramiento con el tramo real contiguo.

Paso 1 Tramos y cargas

Tramo	L (m)	EI (kN m^2)	Cargas de vano
A–B	8	20000	repartida 0 $\rightarrow$ 50 kN/m en $[0,3]$; repartida 50 kN/m en $[3,4]$; puntual 10 kN en $x=5$; par 20 kN m en $x=7$
B–C	6	20000	repartida 0 $\rightarrow$ 20 kN/m en $[0,2]$; repartida 20 kN/m en $[2,4]$; repartida 20 $\rightarrow$ 0 kN/m en $[4,6]$

Incógnitas del método: los momentos flectores $\bar{M}$ en los apoyos. En un apoyo simple extremo $\bar{M}=0$; un extremo empotrado sí es incógnita y su ecuación se escribe con el recurso clásico del *tramo ficticio* de luz nula.

Paso 2 Ecuaciones de los tres momentos

Los términos de carga α son las rotaciones de los extremos del tramo simplemente apoyado bajo su propia carga. Cuando la carga del vano responde a uno de los esquemas usuales se toman de la tabla siguiente —sin integrar—; en cualquier otro caso se obtienen superponiendo las cargas puntuales $w(x)\,dx$.

Caso	Esquema de carga	Rotaciones en los apoyos
9	trapecial de meseta w y longitud b, con rampas de longitud a en los extremos	$\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{w}{24}\left[L^3-a^2\,(2L-a)\right]$
11	par concentrado M a distancia a del apoyo 1 y b del 2 (positivo en sentido horario)	$\alpha_1=M\dfrac{L}{6}\left(\dfrac{3b^2}{L^2}-1\right)$ $\alpha_2=M\dfrac{L}{6}\left(1-\dfrac{3a^2}{L^2}\right)$

En la tabla L es la luz del tramo y w, P o M el valor de la carga; s, a y b son las longitudes que sitúan la carga dentro del vano, medidas sobre cada esquema.

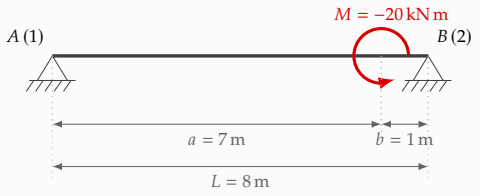
Ecuación en el nudo B

Ecuación de los tres momentos de Clapeyron en el nudo **B**.

Fórmula:

$$\bar{M}_A\,\frac{L_{AB}}{EI}+2\bar{M}_B\left(\frac{L_{AB}}{EI}+\frac{L_{BC}}{EI}\right)+\bar{M}_C\,\frac{L_{BC}}{EI}=-\left(\frac{6\alpha_2^{AB}}{EI}+\frac{6\alpha_1^{BC}}{EI}\right)$$

Cálculo: **TRAMOS:** ABC



Esquema de carga del tramo AB con sus medidas: es el caso 11 de la tabla, con el apoyo 1 en A y el 2 en B. El arco lleva el sentido real del par; su valor en el convenio de la tabla —horario positivo— es $M = -20$.

$$\frac{L_{AB}}{EI} = \frac{8}{EI}$$

Rotaciones en los apoyos:
Tramo AB:
(con w de 0 a 50 kN/m en $[0, 3]$)

$$\alpha_2 = \int_0^3 w(x)\,\frac{x(L-x)(L+x)}{6L}\,dx$$

$$\Rightarrow\ \alpha_2 = 183.1$$

(con $w = 50$ kN/m en $[3, 4]$)

$$\alpha_2 = \int_3^4 w(x)\,\frac{x(L-x)(L+x)}{6L}\,dx$$

$$\Rightarrow\ \alpha_2 = 187.8$$

$$\alpha_2 = \frac{P\,a\,b}{6L}\,(a+L)$$

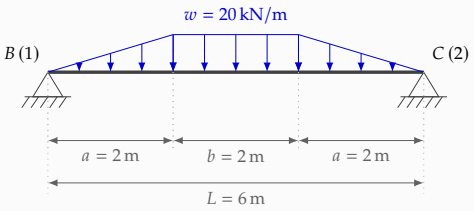
$$\Rightarrow\ \alpha_2 = 40.63$$

Caso 11 de la tabla de rotaciones (par concentrado M a distancia a del apoyo 1 y b del 2 (positivo en sentido horario)), con $M = -20$ kN m y $a = 7$, $b = 1$, $L = 8$ m; no hace falta integrar:

$$\alpha_2 = M\frac{L}{6}\left(1 - \frac{3a^2}{L^2}\right)$$

$$\Rightarrow\ \alpha_2 = 34.58$$

$$\Rightarrow\ \alpha_2^{\text{total}} = 183.1 + 187.8 + 40.63 + 34.58 = 446.1$$



Esquema de carga del tramo BC con sus medidas: es el caso 9 de la tabla, con el apoyo 1 en B y el 2 en C.

$$\frac{L_{BC}}{EI} = \frac{6}{EI}$$

Tramo BC:
Caso 9 de la tabla de rotaciones (trapecial de meseta w y longitud b, con rampas de longitud a en los extremos), con $w = 20$ kN/m y $a = 2$, $b = 2$, $L = 6$ m; no hace falta integrar:

$$\alpha_1 = \frac{w}{24}\left[L^3 - a^2\,(2L - a)\right]$$

$$\Rightarrow\ \alpha_1 = 146.7$$

Ecuación de los tres momentos:

$$\underbrace{\bar{M}_A \cdot \frac{8}{EI}}_{=0} + 2\,\bar{M}_B \cdot \left(\frac{8}{EI} + \frac{6}{EI}\right) + \bar{M}_C \cdot \frac{6}{EI} = -\left(6 \cdot \frac{446.1}{EI} + 6 \cdot \frac{146.7}{EI}\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\bar{M}_A \cdot \frac{8}{EI}}_{=0} + 2\,\bar{M}_B \cdot \left(\frac{8}{EI} + \frac{6}{EI}\right) + \bar{M}_C \cdot \frac{6}{EI} = -\left(\frac{2677}{EI} + \frac{880}{EI}\right)$$

$$\overset{\times EI}{\Rightarrow} \; 28\,\bar{M}_B + 6\,\bar{M}_C = -3557 \;\ldots\; \text{(I)}$$

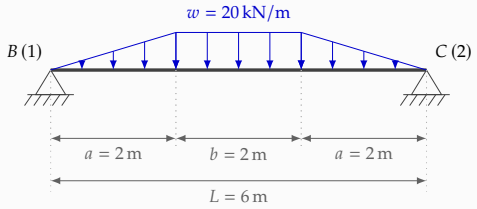
Ecuación en el nudo C

Ecuación de los tres momentos de Clapeyron en el nudo **C** (extremo empotrado).

Fórmula:

$$\bar{M}_B \frac{L_{BC}}{EI} + 2\bar{M}_C \left(\frac{L_{BC}}{EI} + c_0\right) + \bar{M}_{C_0}\, c_0 = -\left(\frac{6\alpha_2^{BC}}{EI} + 6\alpha_1\right)$$

Cálculo: **TRAMOS:** BCC_0



Esquema de carga del tramo BC con sus medidas: es el caso 9 de la tabla, con el apoyo 1 en B y el 2 en C.

$$\frac{L_{BC}}{EI} = \frac{6}{EI}$$

Rotaciones en los apoyos:
Tramo BC:
Caso 9 de la tabla de rotaciones (trapecial de meseta w y longitud b, con rampas de longitud a en los extremos), con $w = 20$ kN/m y $a = 2$, $b = 2$, $L = 6$ m; no hace falta integrar:

$$\alpha_2 = \frac{w}{24}\left[L^3 - a^2\,(2L - a)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_2 = 146.7$$

Tramo ficticio CC_0:
El empotramiento se escribe con un tramo ficticio de luz $L_0 = 0$ e $I_0 = \infty$; su nudo C_0 tiene momento conocido $\bar{M}_{C_0} = 0$.

$$c_0 = \frac{L_0}{EI_0} = \frac{0}{\infty} = 0$$

Ecuación de los tres momentos:

$$\bar{M}_B \cdot \frac{6}{EI} + 2\,\bar{M}_C \cdot \left(\frac{6}{EI} + c_0\right) + \underbrace{\bar{M}_{C_0} \cdot c_0}_{=0} = -\left(6 \cdot \frac{146.7}{EI}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \bar{M}_B \cdot \frac{6}{EI} + 2\,\bar{M}_C \cdot \left(\frac{6}{EI} + c_0\right) + \underbrace{\bar{M}_{C_0} \cdot c_0}_{=0} = -\left(\frac{880}{EI}\right)$$

$$\overset{\times EI}{\Rightarrow} \quad 6\,\bar{M}_B + 12\,\bar{M}_C = -880 \quad \ldots \quad \text{(II)}$$

Paso 3 Resolución del sistema

Sistema de ecuaciones de los tres momentos y su resolución. Los $\bar{M}$ son flectores (SAG+, fibra inferior traccionada); los momentos de extremo que usan las reacciones siguen el convenio antihorario positivo, con $\hat{M}_{ij} = -\bar{M}_i$ en el extremo izquierdo de cada tramo y $\hat{M}_{ji} = +\bar{M}_j$ en el derecho.

Fórmula: $\bar{M}_B,\ \bar{M}_C$ — 2 incógnita(s)

Cálculo: **Sistema de ecuaciones:**

$$\Rightarrow \boxed{28\,\bar{M}_B + 6\,\bar{M}_C = -3557 \quad \text{(I)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{6\,\bar{M}_B + 12\,\bar{M}_C = -880 \quad \text{(II)}}$$

En forma matricial y resolviendo:

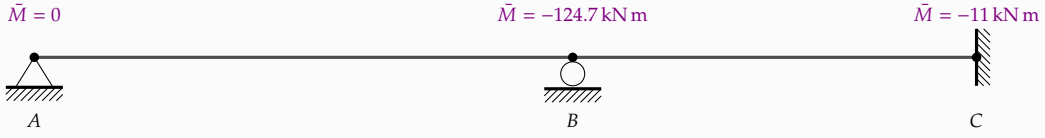
$$\begin{bmatrix} 28 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{M}_B \\ \bar{M}_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -3557 \\ -880 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_B = -124.7\ \text{kN m}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{M}_C = -11\ \text{kN m}}$$

Momentos flectores en todos los apoyos:

Apoyo	$\bar{M}$ (kN m)
A	0
B	−124.7
C	−11

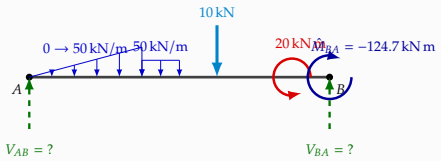


Momentos flectores finales en los apoyos.

Paso 4 Determinación de las reacciones

Con los momentos de extremo ya conocidos, cada tramo se aísla como cuerpo libre y sus dos cortantes salen de la estática.

Tramo AB



Cuerpo libre del tramo AB: cargas del vano (rojo), momentos de extremo ya calculados $\hat{M}_{AB}$ y $\hat{M}_{BA}$ (azul, kN m, antihorario positivo) y los cortantes incógnita V_{AB} y V_{BA} (verde a trazos, dibujados en el sentido local $+y'$, aquí hacia arriba que suponen las ecuaciones).

Equilibrio estático del tramo aislado, con $L = 8$ m.

Fórmula:

$$\sum M_j = 0 \;\Rightarrow\; V_{ij} = \frac{\hat{M}_{ij} + \hat{M}_{ji} + M_q}{L}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; V_{ji} = -R_q - V_{ij}$$

Cálculo: Cargas del vano: resultante $R_q = -135$ kN y momento respecto a B: $M_q = 725$ kN m.

$$(\circlearrowleft +)\ \textstyle\sum M_B = 0 \quad\Rightarrow\quad -V_{AB}(8) + 0 + (-124.7) + 725 = 0 \quad \text{... (I)}$$

$$(\uparrow +)\ \textstyle\sum F_y = 0 \quad\Rightarrow\quad V_{AB} + V_{BA} + (-135) = 0 \quad \text{... (II)}$$

Resolviendo (I) y (II) obtenemos:

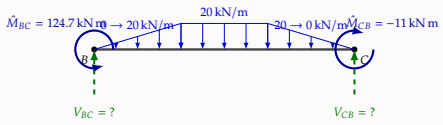
$$\Rightarrow \quad V_{AB} = \frac{0 + (-124.7) + 725}{8}$$

$$\Rightarrow \quad V_{AB} = \boxed{75.04 \text{ kN}}$$

$$\Rightarrow \quad V_{BA} = 135 - 75.04$$

$$\Rightarrow \quad V_{BA} = \boxed{59.96 \text{ kN}}$$

Tramo BC



Cuerpo libre del tramo BC: cargas del vano (rojo), momentos de extremo ya calculados $\hat{M}_{BC}$ y $\hat{M}_{CB}$ (azul, kN m, antihorario positivo) y los cortantes incógnita V_{BC} y V_{CB} (verde a trazos, dibujados en el sentido local $+y'$, aquí hacia arriba que suponen las ecuaciones).

Equilibrio estático del tramo aislado, con $L = 6$ m.

Fórmula:

$$\sum M_j = 0 \;\Rightarrow\; V_{ij} = \frac{\hat{M}_{ij} + \hat{M}_{ji} + M_q}{L}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; V_{ji} = -R_q - V_{ij}$$

Cálculo: Cargas del vano: resultante $R_q = -80$ kN y momento respecto a C: $M_q = 240$ kN m.

$$(\circlearrowleft +)\ \textstyle\sum M_C = 0 \quad\Rightarrow\quad -V_{BC}(6) + 124.7 + (-11) + 240 = 0 \quad \text{... (I)}$$

$$(\uparrow +)\ \textstyle\sum F_y = 0 \quad\Rightarrow\quad V_{BC} + V_{CB} + (-80) = 0 \quad \text{... (II)}$$

Resolviendo (I) y (II) obtenemos:

$$\Rightarrow\quad V_{BC} = \frac{124.7 + (-11) + 240}{6}$$

$$\Rightarrow\quad V_{BC} = \boxed{58.94 \text{ kN}}$$

$$\Rightarrow\quad V_{CB} = 80 - 58.94$$

$$\Rightarrow\quad V_{CB} = \boxed{21.06 \text{ kN}}$$

Reacciones totales en apoyos

Suma de las contribuciones de todos los tramos adyacentes a cada apoyo.

Fórmula:

$$R_{\text{nudo}} = \sum_{\text{tramos}} V_{\text{tramo,nudo}}$$

Cálculo: Reacciones en apoyos:

$$A_y = V_{AB} = \boxed{75.04 \text{ kN}}$$

$$B_y = V_{BA} + V_{BC} = 59.96 + 58.94 = \boxed{118.9 \text{ kN}}$$

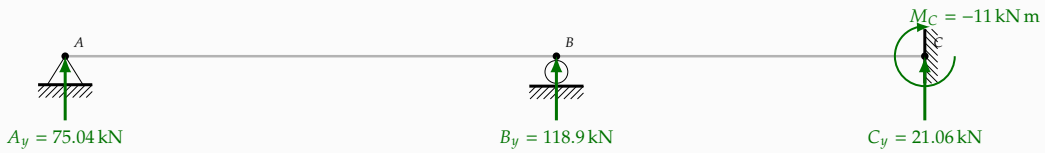
$$C_y = V_{CB} = \boxed{21.06 \text{ kN}}$$

Momentos de reacción en los empotramientos (el momento de extremo de la barra que llega, descontado el momento aplicado en el nudo):

$$M_C = \hat{M}_{CB} = \boxed{-11\ \text{kN m}}$$

Comparación con el método matricial de rigidez:

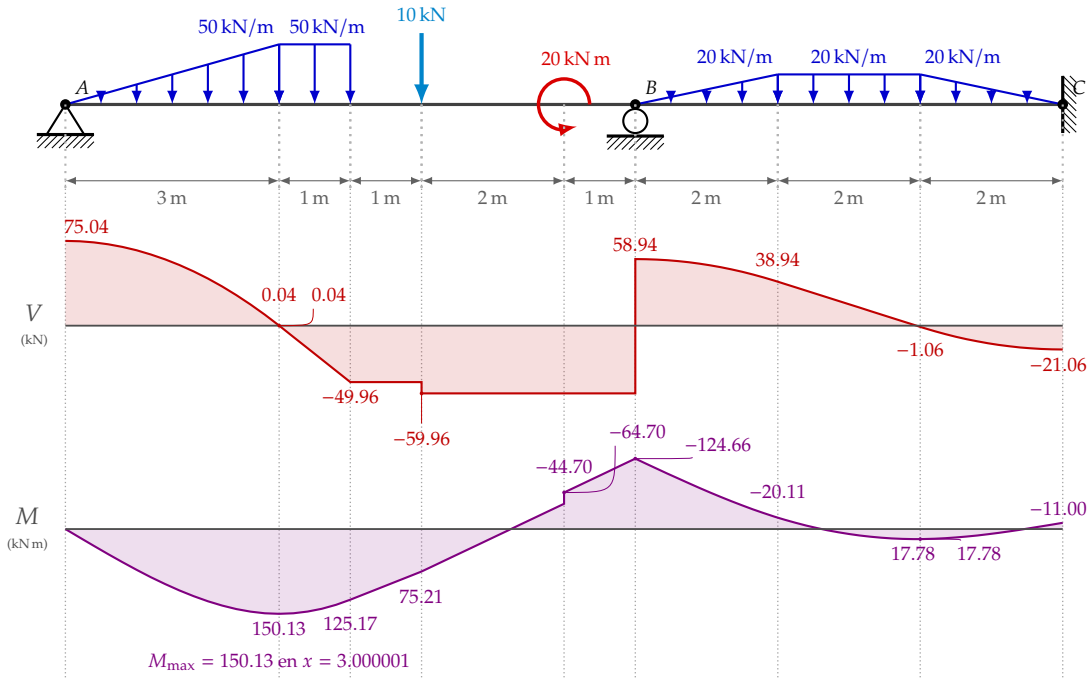
Apoyo	$\cdot_y$ por equilibrio (kN)	$\cdot_y$ matricial (kN)	Dif.
A	75.04	75.04	$-6.285 \cdot 10^{-9}$
B	118.9	118.9	$2.265 \cdot 10^{-8}$
C	21.06	21.06	$-1.636 \cdot 10^{-8}$



Reacciones de la viga continua.

Diagramas de fuerzas internas

Esfuerzo axial N, fuerza cortante V y momento flector M



Generado con EMI: calculadora estructural online: emiestruc.com