Método de cortes en arcos (leyes en θ)

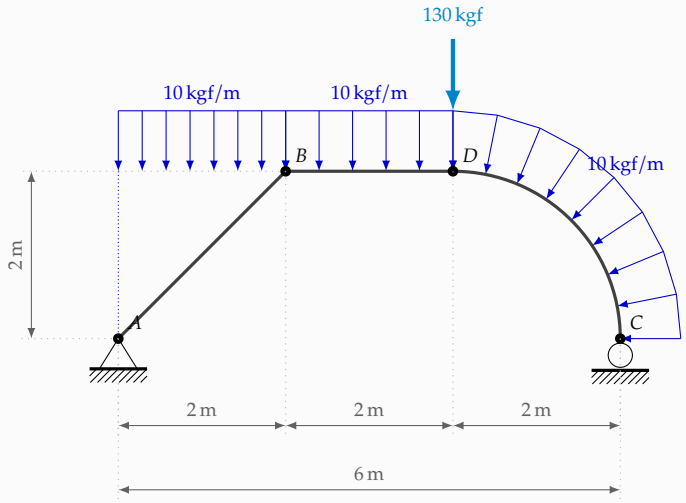
PÓRTICO

EMI · *solución paso a paso*

Unidades de trabajo: L [m] F [kgf] M [kgf m] q [kgf/m] δ [mm] E [kgf/m^2] A [m^2] I [m^4]

Estructura **isostática** con barras curvas: los esfuerzos se obtienen por estática pura. Primero se hallan las reacciones; después, en cada barra, se corta y se plantea el equilibrio del trozo que va de su nudo inicial al corte. En los arcos la posición del corte es el ángulo θ, medido en el centro desde el radio del **arranque** de la barra y abriéndose al avanzar hacia su nudo final: empieza en $\theta = 0$ y hace el papel de la x de una viga. Recorrido de izquierda a derecha ese giro se ve horario, y antihorario si se recorre de derecha a izquierda.

Paso 1 Datos y clasificación estática



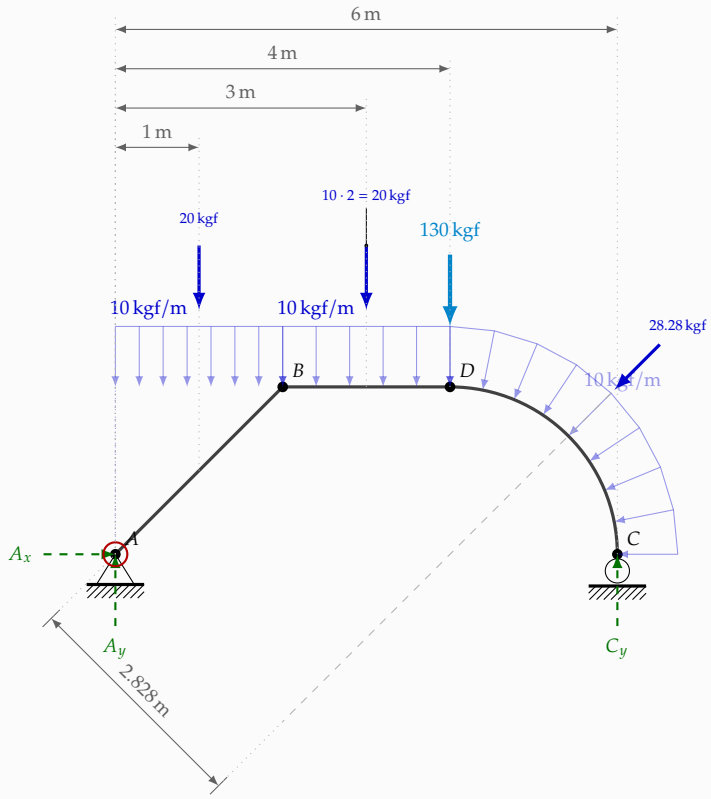
Geometría, apoyos y cargas de la estructura analizada.

Con $m = 3$ barras, $r = 3$ reacciones, $n = 4$ nudos y $h = 0$ liberaciones (rótulas): $GH = 3m + r - 3n - h = 9 + 3 - 12 - 0 = 0 \Rightarrow$ **isostática**. El método de cortes es directamente aplicable.

Paso 2 Reacciones en los apoyos

Por ser isostática, el equilibrio global determina todas las reacciones. Las cargas repartidas sobre un arco entran en las sumatorias por su resultante, integrada sobre la curva: $\int \mathbf{w}\, R\, d\theta$

para la fuerza y $\int (\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) \times \mathbf{w}\, R\, d\theta$ para el momento.



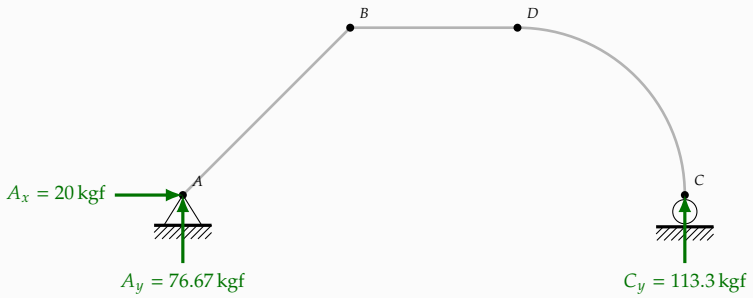
Cuerpo libre: las reacciones por calcular (a trazos), las cargas repartidas atenuadas y, encima, la resultante de cada una en su centroide, con su brazo hasta A, el punto donde se toman los momentos ($\sum M_A = 0$).

Con las cargas aplicadas y las reacciones como incógnitas, las sumatorias dan:

$$
\begin{aligned}
(\rightarrow +)\ \sum F_x = 0 \quad &\Rightarrow \quad A_x - 20 = 0 \quad \text{... (I)} \\
(\uparrow +)\ \sum F_y = 0 \quad &\Rightarrow \quad A_y + C_y - 130 - 20 - 20 - 20 = 0 \\
&\Rightarrow \quad A_y + C_y - 190 = 0 \quad \text{... (II)} \\
(\circlearrowleft +)\ \sum M_A = 0 \quad &\Rightarrow \quad 6\,C_y - 520 - 20 - 80 - 60 = 0 \\
&\Rightarrow \quad 6\,C_y - 680 = 0 \quad \text{... (III)}
\end{aligned}
$$

Resolviendo (I), (II) y (III) obtenemos:

$$\Rightarrow \quad A_x = \boxed{20 \text{ kgf}}$$
$$\Rightarrow \quad A_y = \boxed{76.67 \text{ kgf}}$$
$$\Rightarrow \quad C_y = \boxed{113.3 \text{ kgf}}$$



Reacciones en los apoyos (kgf, kgf m).

Paso 3 Esfuerzos internos por barras (método de cortes)

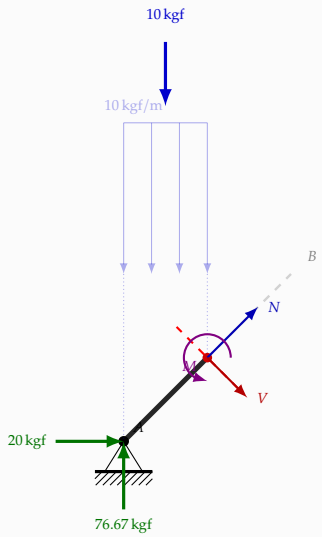
Las leyes se escriben **sin unidades**: θ en radianes, N y V en kgf y M en kgf m. En cada barra se corta a una distancia de su nudo inicial: en un arco esa posición se da con el ángulo θ, que vale 0 en ese nudo y se va abriendo, igual que la x de una viga. El cuerpo libre muestra las barras, apoyos, reacciones y cargas que preceden al corte; sumando esas acciones, **cada una por su brazo hasta la sección**, se obtienen $N(\theta)$, $V(\theta)$ y $M(\theta)$. Convenio: $N > 0$ tracción; V y M positivos como en una viga recorrida de su nudo inicial al final (momento positivo traccionando la fibra del lado de $-\mathbf{n}$). θ **no se reinicia** en cada tramo: es la misma variable en toda la barra.

Barra $A-B$ $\quad 0 \le x \le 2.828$ (m)

Barra recta de longitud $L = 2.828$ m; x se mide desde A, con $\mathbf{t} = (0.7071, 0.7071)$ y $\mathbf{n} = (-0.7071, 0.7071)$. Equilibrio del trozo A–corte, con momentos respecto a A y trasladados al corte:

$$M(x) = -\Sigma M_A + x\,(\mathbf{t} \times \Sigma \mathbf{F}), \qquad N(x) = -\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}, \qquad V(x) = \Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$$

Tramo 1: $0 \le x \le 2.828$



Cuerpo libre de la porción retenida al cortar en el tramo único.

Carga repartida de 10 a 10 kgf/m sobre el tramo; su aporte a la resultante se integra a lo largo de la barra:

$$\Delta F_y^{(1)} = \int_0^x (-7.071)\, dt = -7.071\, x$$

$$\Delta M_A^{(1)} = \int_0^x (-5\, t)\, dt = -2.5\, x^2$$

Equilibrio de la porción retenida, con cada acción por su brazo hasta la sección:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x(x) &= A_x + \Delta F_x^{(1)} \\ &= 20 + 0 \\ &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y(x) &= A_y + \Delta F_y^{(1)} \\ &= 76.67 - 7.071\, x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{AB}(x) &= -\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \\ &= -68.35 + 5\, x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{AB}(x) &= \Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \\ &= 40.07 - 5\, x \end{aligned}$$

$$M_{w_1}(x) = -\Delta M_A^{(1)} + x\left(\mathbf{t}\times\Delta\mathbf{F}^{(1)}\right) = -2.5\,x^2$$

$$\begin{aligned} M_{AB}(x) &= A_y\,x - A_x\,(y-4) + M_{w_1}(x) \\ &= 76.67\,(0.7071\,x) - 20\,(0.7071\,x) - 2.5\,x^2 \\ &= 40.07\,x - 2.5\,x^2 \end{aligned}$$

Evaluando en los extremos del tramo:

$$x = 0\ (A) \rightarrow \begin{cases} N(0) = -68.35\ \text{kgf} \\ V(0) = 40.07\ \text{kgf} \\ M(0) = 0\ \text{kgf m} \end{cases}$$

$$x = 2.828\ (B) \rightarrow \begin{cases} N(2.828) = -54.21\ \text{kgf} \\ V(2.828) = 25.93\ \text{kgf} \\ M(2.828) = 93.33\ \text{kgf m} \end{cases}$$

Barra $D-C$ $\quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (rad)

Arco de centro $C = (4, 4)$ y radio $R = 2$ m. La posición del corte se da con el ángulo θ, medido **en el centro desde el radio del arranque** D y abriéndose al avanzar hacia C: θ hace aquí el papel de la x de una viga, que también empieza en 0 en el nudo inicial. Recorriendo la barra de izquierda a derecha ese giro se ve horario, y antihorario si se recorre de derecha a izquierda. El corte se sitúa con el triángulo rectángulo que forman el radio, el ángulo y sus catetos ($R\cos\theta = 2\cos\theta$ y $R\sin\theta = 2\sin\theta$): queda a $R - R\cos\theta = 2 - 2\cos\theta$ por debajo de D y a $R\sin\theta = 2\sin\theta$ a la derecha.

$$x(\theta) = 4 + 2\,\sin\theta, \qquad y(\theta) = 4 + 2\,\cos\theta, \qquad ds = R\,d\theta$$

La barra va de $\theta_D = 0$ a $\theta_C = \frac{\pi}{2}$ (90°). En el corte, la tangente en el sentido de la barra y la normal a su izquierda son $\mathbf{t} = (\cos\theta, -\sin\theta)$ y $\mathbf{n} = (\sin\theta, \cos\theta)$. Equilibrio del trozo D–corte. Con ΣF_x, ΣF_y la resultante de las fuerzas que actúan sobre él y ΣM_C su momento respecto al centro (antihorario positivo), el momento respecto al corte y los esfuerzos son:

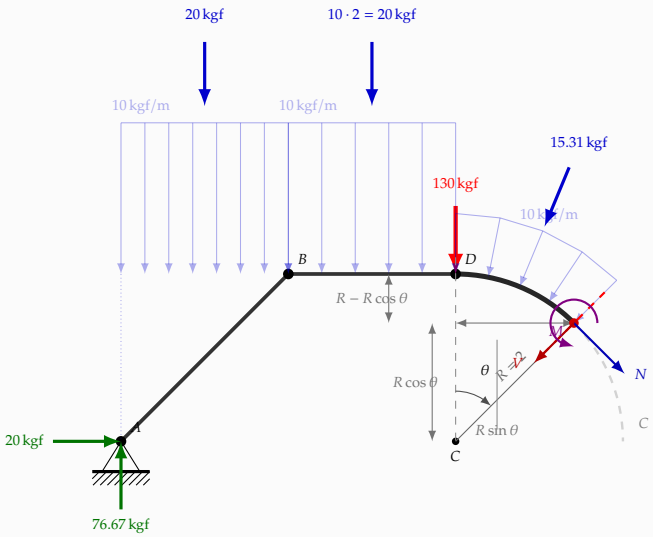
$$\begin{aligned} M(\theta) &= -\Sigma M_C + (x - x_C)\,\Sigma F_y - (y - y_C)\,\Sigma F_x \\ &= -\Sigma M_C + (2\,\sin\theta)\,\Sigma F_y - (2\,\cos\theta)\,\Sigma F_x \end{aligned}$$

$$N(\theta) = -\Sigma\mathbf{F}\cdot\mathbf{t} = -\left[(\cos\theta)\,\Sigma F_x + (-\sin\theta)\,\Sigma F_y\right]$$

$$V(\theta) = \Sigma\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = (\sin\theta)\,\Sigma F_x + (\cos\theta)\,\Sigma F_y$$

Las leyes se escriben sin unidades (θ en radianes; N, V en kgf; M en kgf m). θ **no se reinicia** en cada tramo: es la misma variable en toda la barra.

Tramo 1: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (0° a 90°)



Cuerpo libre de la porción retenida al cortar en el tramo único; la posición del corte se lee con θ y su triángulo ($R\cos\theta$, $R - R\cos\theta$ y $R\sin\theta$).

Carga repartida perpendicular a la barra (radial) de 10 a 10 kgf/m sobre el tramo; su aporte a la resultante se integra a lo largo del arco, con $ds = R\,dt$:

$$\Delta F_x^{(1)} = \int_0^{\theta} (-20\,\sin t)\,dt = -20 + 20\,\cos\theta$$

$$\Delta F_y^{(1)} = \int_0^{\theta} (-20\,\cos t)\,dt = -20\,\sin\theta$$

Equilibrio de la porción retenida, con cada acción por su brazo hasta la sección:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x(\theta) &= A_x + \Delta F_x^{(1)} \\ &= 20 + (-20 + 20\,\cos\theta) \\ &= 20\,\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_y(\theta) &= A_y - 130 - 20 - 20 + \Delta F_y^{(1)} \\ &= 76.67 - 130 - 20 - 20 - 20\,\sin\theta \\ &= -93.33 - 20\,\sin\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_{DC}(\theta) &= -\left[(\cos\theta)\,\Sigma F_x + (-\sin\theta)\,\Sigma F_y\right] \\ &= -20 - 93.33\,\sin\theta\end{aligned}$$

$$V_{DC}(\theta) = (\sin\theta)\,\Sigma F_x + (\cos\theta)\,\Sigma F_y$$
$$= -93.33\,\cos\theta$$

$$M_{w_1}(\theta) = (x - x_C)\,\Delta F_y^{(1)} - (y - y_C)\,\Delta F_x^{(1)} - \Delta M_C^{(1)} = -40 + 40\,\cos\theta$$

$$M_{DC}(\theta) = A_y\,x - A_x\,(y-4) - 130\,(x-4) - 20\,(x-1) - 20\,(x-3) + M_{w_1}(\theta)$$
$$= 76.67\,(4 + 2\,\sin\theta) - 20\,(2\,\cos\theta) - 130\,(2\,\sin\theta)$$
$$- 20\,(3 + 2\,\sin\theta) - 20\,(1 + 2\,\sin\theta) + (-40 + 40\,\cos\theta)$$
$$= 186.7 - 186.7\,\sin\theta$$

Tabulando θ en el tramo:

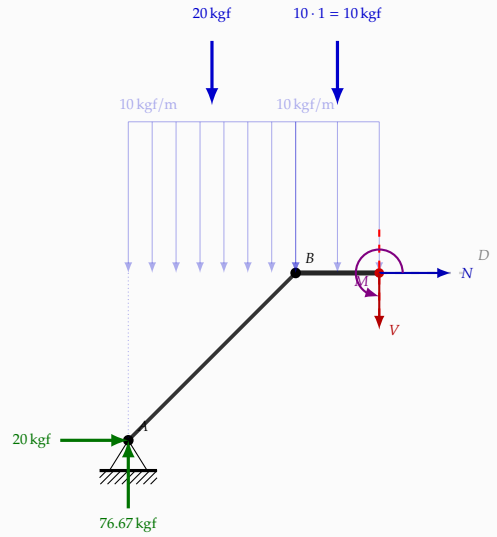
θ (rad)	θ (grados)	N (kgf)	V (kgf)	M (kgf m)	Punto
0	0°	−20	−93.33	186.7	D
$\pi/6$	30°	−66.67	−80.83	93.33	
$\pi/3$	60°	−100.8	−46.67	25.01	
$\pi/2$	90°	−113.3	0	0	C

Barra $B-D$ $\quad 0 \le x \le 2$ (m)

Barra recta de longitud $L = 2$ m; x se mide desde B, con $\mathbf{t} = (1, 0)$ y $\mathbf{n} = (0, 1)$. Equilibrio del trozo B–corte, con momentos respecto a B y trasladados al corte:

$$M(x) = -\Sigma M_B + x\,(\mathbf{t} \times \Sigma\mathbf{F}), \qquad N(x) = -\Sigma\mathbf{F}\cdot\mathbf{t}, \qquad V(x) = \Sigma\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$$

Tramo 1: $0 \le x \le 2$



Cuerpo libre de la porción retenida al cortar en el tramo único.

Carga repartida de 10 a 10 kgf/m sobre el tramo; su aporte a la resultante se integra a lo largo de la barra:

$$\Delta F_y^{(1)} = \int_0^x (-10)\, dt = -10\, x$$

$$\Delta M_B^{(1)} = \int_0^x (-10\, t)\, dt = -5\, x^2$$

Equilibrio de la porción retenida, con cada acción por su brazo hasta la sección:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x(x) &= A_x + \Delta F_x^{(1)} \\ &= 20 + 0 \\ &= 20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_y(x) &= A_y - 20 + \Delta F_y^{(1)} \\ &= 76.67 - 20 - 10\, x \\ &= 56.67 - 10\, x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_{BD}(x) &= -\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \\ &= -20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{BD}(x) &= \Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \\ &= 56.67 - 10\, x\end{aligned}$$

$$M_{w_1}(x) = -\Delta M_B^{(1)} + x \left(\mathbf{t} \times \Delta \mathbf{F}^{(1)}\right) = -5\, x^2$$

$$\begin{aligned}M_{BD}(x) &= A_y\, x - A_x\, (y - 4) - 20\, (x - 1) + M_{w_1}(x) \\ &= 76.67\, (2 + x) - 20\, (2) - 20\, (1 + x) - 5\, x^2 \\ &= 93.33 + 56.67\, x - 5\, x^2\end{aligned}$$

Evaluando en los extremos del tramo:

$$x = 0\ (B) \rightarrow \begin{cases} N(0) = -20 \text{ kgf} \\ V(0) = 56.67 \text{ kgf} \\ M(0) = 93.33 \text{ kgf m} \end{cases}$$

$$x = 2\ (D) \rightarrow \begin{cases} N(2) = -20 \text{ kgf} \\ V(2) = 36.67 \text{ kgf} \\ M(2) = 186.7 \text{ kgf m} \end{cases}$$

Diagramas de fuerzas internas

Esfuerzo axial N, fuerza cortante V y momento flector M

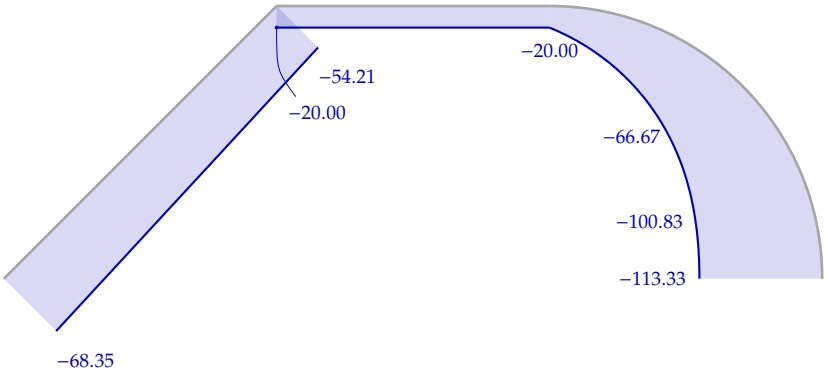


Diagrama de fuerza axial (N), en kgf.

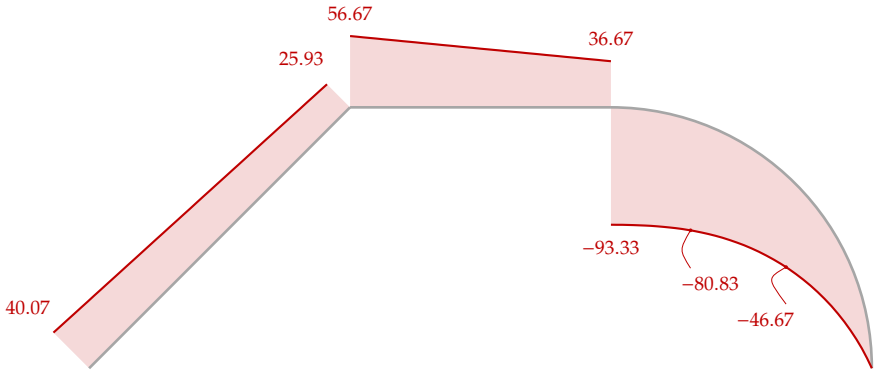


Diagrama de fuerza cortante (V), en kgf.

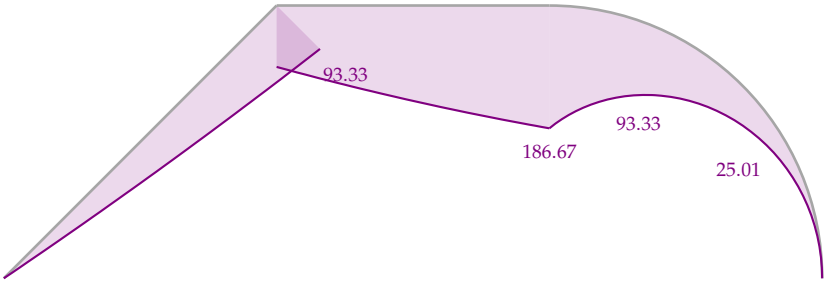
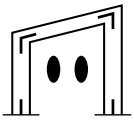


Diagrama de momento flector (M), en kgf m.



Generado con EMI: calculadora estructural online: emiestruc.com