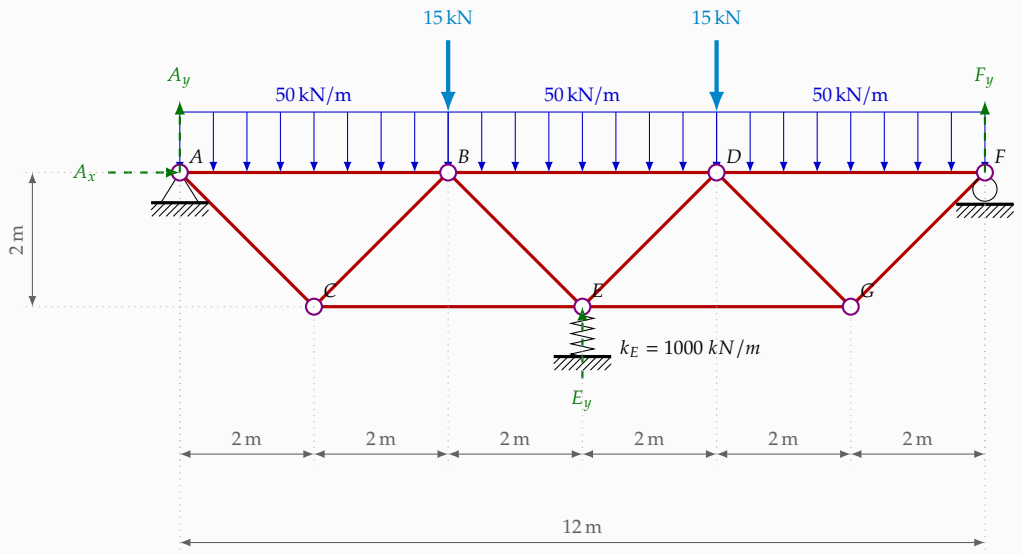
Segundo Teorema de Castigliano

ARMADURA HIPERESTÁTICA

EMI · *solución paso a paso*

Unidades de trabajo: L [m] F [kN] M [kN m] q [kN/m] δ [mm] E [kN/m^2] A [m^2] I [m^4]

Energía de deformación axial y 2.º teorema de Castigliano: $U = \sum \dfrac{N^2 L}{2EA}$. Y $\dfrac{\partial U}{\partial X_i} = \sum \dfrac{N}{EA}\dfrac{\partial N}{\partial X_i} L = 0$. **Sin cargas unitarias**: la estructura se resuelve una sola vez con la redundante viva, y de ahí salen $N(X_i)$ y su derivada.



Armadura analizada, con las reacciones por calcular (a trazos, en el sentido positivo supuesto).

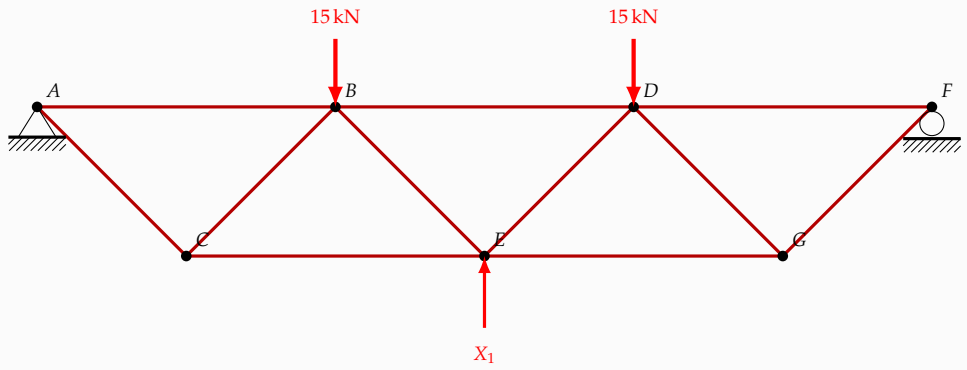
Paso 1 Clasificación estática (grado total = interno + externo)

$$GH = m + r - 2n = 11 + 4 - 2(7) = 1$$

Descomposición: grado **externo** = $r - 3 = 4 - 3 = 1$; grado **interno** = $m - 2n + 3 = 11 - 14 + 3 = 0$.
La armadura es **hiperestática de grado 1**, 1 externa(s).

Paso 2 Redundantes y estructura primaria

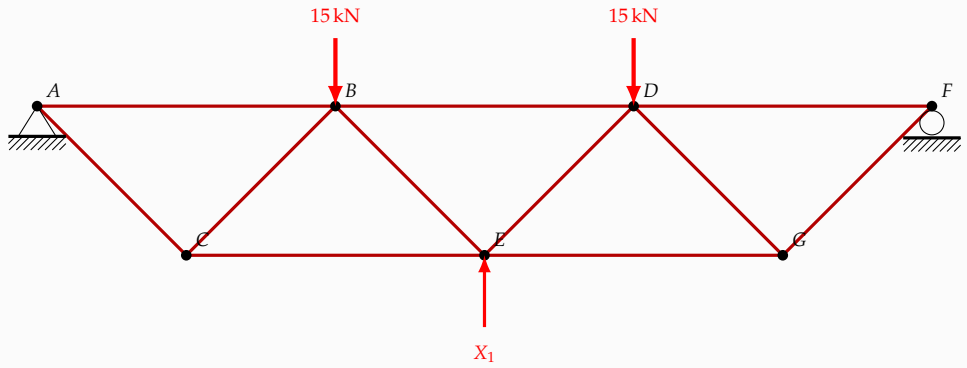
Se eligen 1 redundante(s) (selección del usuario): $X_1 = E_y$ (apoyo elástico, muelle liberado). La estructura primaria (isostática y estable) resulta de cortar las barras redundantes y liberar las reacciones redundantes:



Estructura primaria: barras cortadas y reacciones liberadas marcadas con X_i.

Paso 3 Estática en función de las redundantes

No se plantean casos de carga unitarios: la estructura se resuelve **una sola vez** con la redundante X_1 tratada como una carga más. Todo, reacciones y axiles, queda entonces en función de ella, que es lo que después se deriva.



Estructura con la redundante liberada y aplicada como acción X_1, junto a las cargas reales.

3.1 Reacciones

Las tres ecuaciones de la estática, con las redundantes entre las acciones:

$$A_x = 0 \text{ kN}$$

$$A_y = 15 - 0.5\,X_1 \text{ kN}$$

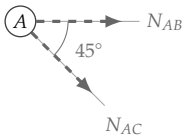
$$F_y = 15 - 0.5\,X_1 \text{ kN}$$

$$E_y = X_1 \quad \text{(la reacción liberada es la propia redundante)}$$

3.2 Equilibrio de nudos

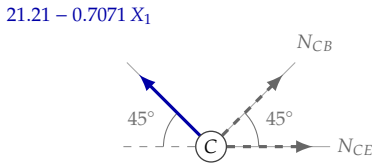
Nudo a nudo, con a lo sumo dos incógnitas en cada uno y arrastrando las redundantes. Tracción positiva.

Nudo A



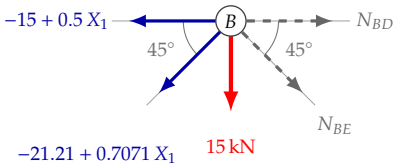
$$(\rightarrow +)\ \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{AB} + N_{AC}\cdot\cos(45°) = 0$$
$$\Rightarrow \quad N_{AB} = -\left[N_{AC}\cdot\cos(45°)\right]$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{N_{AB} = -15 + 0.5\,X_1}$$
$$(\uparrow +)\ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 15 - 0.5\,X_1 - N_{AC}\cdot\sin(45°) = 0$$
$$\Rightarrow \quad N_{AC} = \frac{-\left[15 - 0.5\,X_1\right]}{-\sin(45°)}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{N_{AC} = 21.21 - 0.7071\,X_1}$$

Nudo C



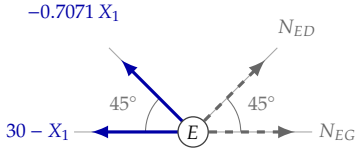
$$(\rightarrow +)\ \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -(21.21 - 0.7071\,X_1)\cdot\cos(45°) + N_{CB}\cdot\cos(45°) + N_{CE} = 0$$
$$\Rightarrow \quad -15 + 0.5\,X_1 + N_{CB}\cdot\cos(45°) + N_{CE} = 0$$
$$\Rightarrow \quad N_{CE} = -\left[-15 + 0.5\,X_1 + N_{CB}\cdot\cos(45°)\right]$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{N_{CE} = 30 - X_1}$$
$$(\uparrow +)\ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad (21.21 - 0.7071\,X_1)\cdot\sin(45°) + N_{CB}\cdot\sin(45°) = 0$$
$$\Rightarrow \quad 15 - 0.5\,X_1 + N_{CB}\cdot\sin(45°) = 0$$
$$\Rightarrow \quad N_{CB} = \frac{-\left[15 - 0.5\,X_1\right]}{\sin(45°)}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{N_{CB} = -21.21 + 0.7071\,X_1}$$

Nudo B



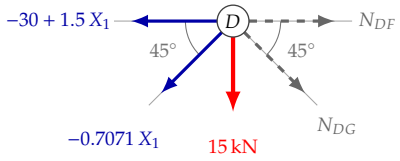
$$(\rightarrow +)\ \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -(-15 + 0.5\,X_1) - (-21.21 + 0.7071\,X_1)\cdot\cos(45°) + N_{BD} + N_{BE}\cdot\cos(45°) = 0$$
$$\Rightarrow \quad 30 - X_1 + N_{BD} + N_{BE}\cdot\cos(45°) = 0$$
$$\Rightarrow \quad N_{BD} = -\left[30 - X_1 + N_{BE}\cdot\cos(45°)\right]$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{N_{BD} = -30 + 1.5\,X_1}$$
$$(\uparrow +)\ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -15 - (-21.21 + 0.7071\,X_1)\cdot\sin(45°) - N_{BE}\cdot\sin(45°) = 0$$
$$\Rightarrow \quad -0.5\,X_1 - N_{BE}\cdot\sin(45°) = 0$$
$$\Rightarrow \quad N_{BE} = \frac{-\left[-0.5\,X_1\right]}{-\sin(45°)}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{N_{BE} = -0.7071\,X_1}$$

Nudo E



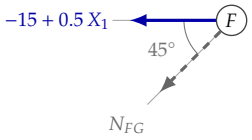
$$(\rightarrow +)\ \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -\,-0.7071\,X_1\cdot\cos(45°) - (30 - X_1) + N_{ED}\cdot\cos(45°) + N_{EG} = 0$$
$$\Rightarrow \quad -30 + 1.5\,X_1 + N_{ED}\cdot\cos(45°) + N_{EG} = 0$$
$$\Rightarrow \quad N_{EG} = -\left[-30 + 1.5\,X_1 + N_{ED}\cdot\cos(45°)\right]$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{N_{EG} = 30 - X_1}$$
$$(\uparrow +)\ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 + -0.7071\,X_1\cdot\sin(45°) + N_{ED}\cdot\sin(45°) = 0$$
$$\Rightarrow \quad 0.5\,X_1 + N_{ED}\cdot\sin(45°) = 0$$
$$\Rightarrow \quad N_{ED} = \frac{-\left[0.5\,X_1\right]}{\sin(45°)}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{N_{ED} = -0.7071\,X_1}$$

Nudo D



$$
\begin{aligned}
(\rightarrow +)\ \textstyle\sum F_x = 0 \quad &\Rightarrow \quad -\,-\,0.7071\,X_1 \cdot \cos(45°) - (-30 + 1.5\,X_1) + N_{DG} \cdot \cos(45°) + N_{DF} = 0 \\
&\Rightarrow \quad 30 - X_1 + N_{DG} \cdot \cos(45°) + N_{DF} = 0 \\
&\Rightarrow \quad N_{DF} = -\,[30 - X_1 + N_{DG} \cdot \cos(45°)] \\
&\Rightarrow \quad \boxed{N_{DF} = -15 + 0.5\,X_1} \\
(\uparrow +)\ \textstyle\sum F_y = 0 \quad &\Rightarrow \quad -15 - -0.7071\,X_1 \cdot \sin(45°) - N_{DG} \cdot \sin(45°) = 0 \\
&\Rightarrow \quad -15 + 0.5\,X_1 - N_{DG} \cdot \sin(45°) = 0 \\
&\Rightarrow \quad N_{DG} = \frac{-\,[-15 + 0.5\,X_1]}{-\sin(45°)} \\
&\Rightarrow \quad \boxed{N_{DG} = -21.21 + 0.7071\,X_1}
\end{aligned}
$$

Nudo F



$$
\begin{aligned}
(\rightarrow +)\ \textstyle\sum F_x = 0 \quad &\Rightarrow \quad 15 - 0.5\,X_1 - N_{FG} \cdot \cos(45°) = 0 \\
&\Rightarrow \quad N_{FG} = \frac{-\,[15 - 0.5\,X_1]}{-\cos(45°)} \\
&\Rightarrow \quad \boxed{N_{FG} = 21.21 - 0.7071\,X_1} \\
(\uparrow +)\ \textstyle\sum F_y = 0 \quad &\Rightarrow \quad 15 - 0.5\,X_1 - N_{FG} \cdot \sin(45°) = 0
\end{aligned}
$$

Paso 4 Derivada de los axiles respecto de las redundantes

Cada N es una función lineal de la redundante, así que su derivada es directamente el coeficiente que la acompaña:

$$N = N(X_i) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial X_i} = \text{coeficiente de } X_i \text{ en } N$$

Paso 5 Segundo teorema de Castigliano

En una armadura la energía de deformación es la axial de las barras y, si hay apoyos elásticos, la que almacena cada muelle. La derivada respecto de una redundante es el desplazamiento asociado a ella:

$$U = \sum \frac{N^2 L}{2EA} + \sum \frac{X^2}{2k} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial X_i} = \sum \frac{N\,L}{EA}\,\frac{\partial N}{\partial X_i} + \frac{X_i}{k}$$

Y ese desplazamiento **vale cero**: el apoyo liberado no cede más de lo que le deja su muelle, y ese ceder es justo el término X_i/k de la derivada. Ahí está la ecuación que le falta a la estática, una por redundante:

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = \sum \frac{N}{EA}\,\frac{\partial N}{\partial X_i}\,L + \frac{X_i}{k} = 0$$

Como EA es constante en todas las barras no es necesario operarla: es un factor común del denominador y, al estar la suma igualada a cero, se simplifica. La tabla acumula entonces $N \cdot L \cdot \partial N/\partial X_i$ a secas.

Barra	N (kN)	$\frac{\partial N}{\partial X_1}$	E (kN/m^2)	A (m^2)	L (m)	$N \cdot L \cdot \frac{\partial N}{\partial X_1}$
AB	$-15 + 0.5\,X_1$	0.5	$2 \cdot 10^8$	0.05	4	$-30 + X_1$
BC	$-21.21 + 0.7071\,X_1$	0.7071	$2 \cdot 10^8$	0.05	2.828	$-42.43 + 1.414\,X_1$
CA	$21.21 - 0.7071\,X_1$	-0.7071	$2 \cdot 10^8$	0.05	2.828	$-42.43 + 1.414\,X_1$
DE	$-0.7071\,X_1$	-0.7071	$2 \cdot 10^8$	0.05	2.828	$1.414\,X_1$
FG	$21.21 - 0.7071\,X_1$	-0.7071	$2 \cdot 10^8$	0.05	2.828	$-42.43 + 1.414\,X_1$
DB	$-30 + 1.5\,X_1$	1.5	$2 \cdot 10^8$	0.05	4	$-180 + 9\,X_1$
BE	$-0.7071\,X_1$	-0.7071	$2 \cdot 10^8$	0.05	2.828	$1.414\,X_1$
EG	$30 - X_1$	-1	$2 \cdot 10^8$	0.05	4	$-120 + 4\,X_1$
GD	$-21.21 + 0.7071\,X_1$	0.7071	$2 \cdot 10^8$	0.05	2.828	$-42.43 + 1.414\,X_1$
DF	$-15 + 0.5\,X_1$	0.5	$2 \cdot 10^8$	0.05	4	$-30 + X_1$
CE	$30 - X_1$	-1	$2 \cdot 10^8$	0.05	4	$-120 + 4\,X_1$

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \frac{1}{EA}\left[-649.7 + 27.49\,X_1\right] + \frac{X_1}{1000} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -649.7 + 10030\,X_1 = 0$$

De donde:

$$\boxed{X_1 = 0.06479 \text{ kN}}$$

Paso 6 Sustitución: reacciones y fuerzas de barra

6.1 En las ecuaciones de equilibrio: reacciones

Con X ya conocida, las expresiones del paso 3 dan las reacciones:

$$A_x = 0 = \boxed{0 \text{ kN}}$$

$$A_y = 15 - 0.5 \cdot (0.06479) = \boxed{14.97 \text{ kN}}$$

$$F_y = 15 - 0.5 \cdot (0.06479) = \boxed{14.97 \text{ kN}}$$

$$E_y = X_1 = \boxed{0.06479 \text{ kN}}$$

Comparación con el método matricial de rigidez:

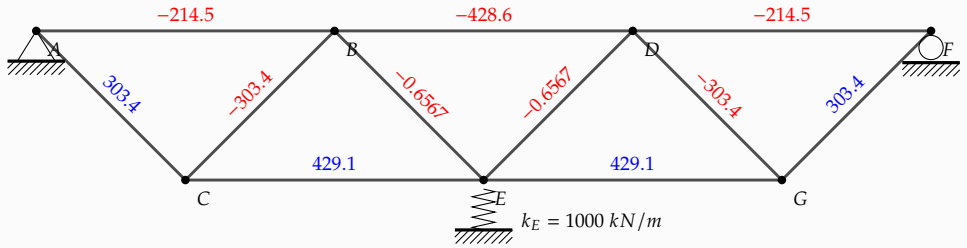
Reacción	Castigliano	Matricial	Dif.
A_x	0	0	0
A_y	14.97	314.5	-299.6
F_y	14.97	314.5	-299.6
E_y	0.06479	0.9287	-0.8639

6.2 En los axiles: fuerzas de barra

Y la misma X en cada N:

Barra	$N(X)$	N (kN)	Matricial
AB	$-15 + 0.5 \cdot (0.06479)$	-14.97	-214.5
BC	$-21.21 + 0.7071 \cdot (0.06479)$	-21.17	-303.4
CA	$21.21 - 0.7071 \cdot (0.06479)$	21.17	303.4
DE	$-0.7071 \cdot (0.06479)$	-0.04582	-0.6567
FG	$21.21 - 0.7071 \cdot (0.06479)$	21.17	303.4
DB	$-30 + 1.5 \cdot (0.06479)$	-29.9	-428.6
BE	$-0.7071 \cdot (0.06479)$	-0.04582	-0.6567
EG	$30 - (0.06479)$	29.94	429.1
GD	$-21.21 + 0.7071 \cdot (0.06479)$	-21.17	-303.4
DF	$-15 + 0.5 \cdot (0.06479)$	-14.97	-214.5
CE	$30 - (0.06479)$	29.94	429.1

Convenio de barras: $N > 0$ tracción, $N < 0$ compresión.



Esfuerzos axiales sobre las barras (kN): en azul las de tracción (+) y en rojo las de compresión (−).

No se ha marcado ningún movimiento en **Movimiento buscado**, así que el desarrollo termina aquí: la carga ficticia Q se coloca en el nudo y la dirección que pregunte el enunciado, y sin pregunta no hay nada que derivar. Marca el desplazamiento que te pidan en el panel de Resolución y el documento añade su carga ficticia y la derivada $\partial U/\partial Q$.

Diagramas de fuerzas internas

Esfuerzo normal N, constante a lo largo de cada barra

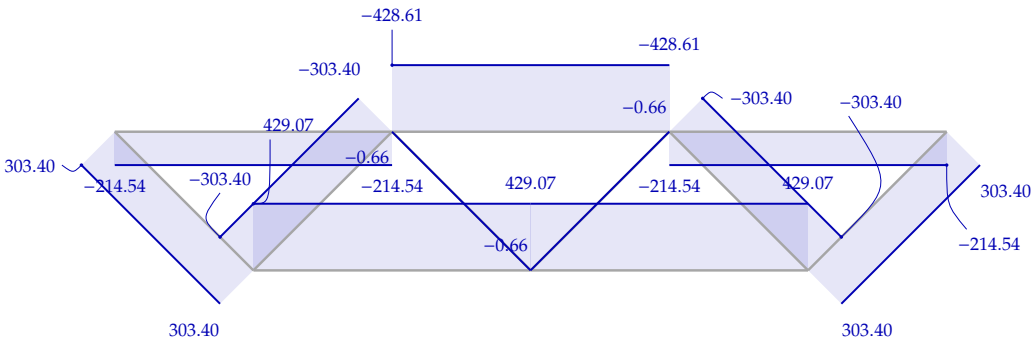
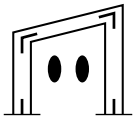


Diagrama de fuerza axial (N), en kN.



Generado con EMI: calculadora estructural online: emiestruc.com