Método matricial con restricciones cinemáticas

PÓRTICO

EMI · *solución paso a paso*

Unidades de trabajo: L [m] F [kN] M [kN m] q [kN/m] δ [mm] E [kN/m^2] A [m^2] I [m^4]

Modelo: pórtico plano, 3 GDL por nudo (u, v, θ). Las coordenadas de giro se miden en sentido **antihorario** (se elige en el panel *Sentido del giro*). El método trabaja con **dos sistemas de coordenadas** y una matriz que los relaciona:

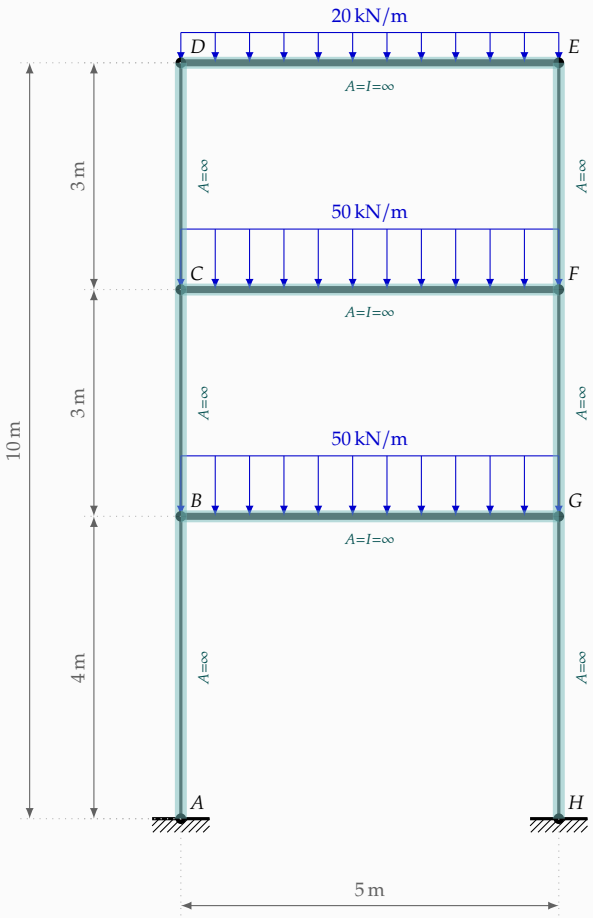
- las coordenadas **globales** q: los desplazamientos libres de los nudos;
- las coordenadas de **elemento** p: los giros y el alargamiento de cada barra.

La matriz de compatibilidad A pasa de unas a otras, $p = A\,q$, y con ella todo el planteamiento se reduce a un triple producto:

$$p = A\,q, \qquad K = A^T k\,A, \qquad q = K^{-1}Q, \qquad P = k\,p$$

(al último paso hay que sumarle las fuerzas de empotramiento perfecto si alguna barra lleva carga en el vano; se ve en el apartado 6). Cuando una barra se declara **rígida** en un sentido, la deformación correspondiente no es pequeña: es *idénticamente nula*. Deja de ser una incógnita y pasa a ser una **ecuación de ligadura** entre los desplazamientos nodales, que **elimina grados de libertad**.

Datos de la estructura



Geometría, apoyos y cargas. En trazo grueso verde, las barras con restricción cinemática.

Barra	Nudos	L (m)	E (kN/m^2)	A (m^2)	I (m^4)	Clase
1	A–B	4	$2 \cdot 10^8$	∞	$1 \cdot 10^{-4}$	Axialmente rígida ($A = \infty$)
2	B–C	3	$2 \cdot 10^8$	∞	$1 \cdot 10^{-4}$	Axialmente rígida ($A = \infty$)
3	C–D	3	$2 \cdot 10^8$	∞	$1 \cdot 10^{-4}$	Axialmente rígida ($A = \infty$)
4	D–E	5	$2 \cdot 10^8$	∞	∞	Totalmente rígida ($A = I = \infty$)
5	E–F	3	$2 \cdot 10^8$	∞	$1 \cdot 10^{-4}$	Axialmente rígida ($A = \infty$)
6	F–G	3	$2 \cdot 10^8$	∞	$1 \cdot 10^{-4}$	Axialmente rígida ($A = \infty$)
7	G–H	4	$2 \cdot 10^8$	∞	$1 \cdot 10^{-4}$	Axialmente rígida ($A = \infty$)
8	C–F	5	$2 \cdot 10^8$	∞	∞	Totalmente rígida ($A = I = \infty$)
9	B–G	5	$2 \cdot 10^8$	∞	∞	Totalmente rígida ($A = I = \infty$)

Acción	Valor
Carga repartida D–E	$w = 20 \rightarrow 20$ kN/m
Carga repartida C–F	$w = 50 \rightarrow 50$ kN/m
Carga repartida B–G	$w = 50 \rightarrow 50$ kN/m

Clasificación estática: $GH = 3m + r - 3n - h = 27 + 6 - 24 - 0 = 9 \Rightarrow$ estructura **hiperestática g=9**. Ojo: el grado de hiperestaticidad se cuenta sobre la estructura *real*; las restricciones cinemáticas no lo alteran, pero sí cambian el número de incógnitas del planteamiento en rigidez.

Paso 1 Definición de los sistemas de coordenadas

1.1 Coordenadas globales q: los grados de libertad de los nudos

Antes de numerar, se cuentan. Cada junta tiene tres grados de libertad (u, v, θ) y pierde los que le impiden los apoyos y le quitan las barras rígidas:

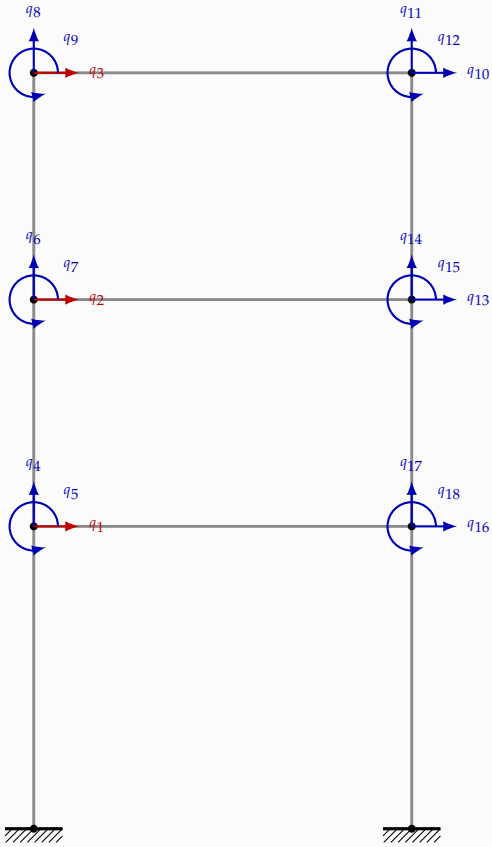
$$\text{NGL} = 3\,\text{NDJ} - \sum(\text{NDJ})_E\, V - A - 2T$$

donde NDJ es el número de juntas; $(\text{NDJ})_E$, las juntas externas (las que tienen apoyo), con $V = 1$ si el vínculo es un rodillo, $V = 2$ si es una articulación y $V = 3$ si es un empotramiento; A, el número de barras axialmente rígidas, y T, el de barras transversalmente rígidas, que quitan dos cada una (los dos giros de extremo quedan ligados al de la cuerda).

- NDJ = 8 juntas.
- Juntas externas: A (empotramiento, $V = 3$) y H (empotramiento, $V = 3$); así que $\sum(\text{NDJ})_E\, V = 3 + 3 = 6$.
- Barras axialmente rígidas ($A = \infty$): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9; así que $A = 9$.
- Barras transversalmente rígidas ($I = \infty$): 4, 8 y 9; así que $T = 3$.

$$\text{NGL} = 3(8) - (3 + 3) - 9 - 2(3) = \boxed{3}$$

De los $3 \times 8 = 24$ desplazamientos de los nudos, los apoyos impiden 6 y quedan 18 no restringidos. De ellos, los NGL = 3 independientes son las incógnitas y llevan los números 1 a 3; los otros 15, dependientes, quedan fijados por las ligaduras y siguen a continuación: **Numeración:** automática: los nudos en su orden de creación y, de los GDL, primero los independientes (1 a NGL) y después los dependientes.



Coordenadas globales q: independientes en rojo (1 a NGL*) y dependientes en azul.*

Nudo	u	v	θ
A	—	—	—
B	q_1	${q_4}^\dagger$	${q_5}^\dagger$
C	q_2	${q_6}^\dagger$	${q_7}^\dagger$
D	q_3	${q_8}^\dagger$	${q_9}^\dagger$
E	${q_{10}}^\dagger$	${q_{11}}^\dagger$	${q_{12}}^\dagger$
F	${q_{13}}^\dagger$	${q_{14}}^\dagger$	${q_{15}}^\dagger$
G	${q_{16}}^\dagger$	${q_{17}}^\dagger$	${q_{18}}^\dagger$
H	—	—	—

(— = restringido por el apoyo; † = GDL dependiente.)

Ecuaciones de ligadura

Cada barra rígida aporta sus condiciones geométricas (los GDL restringidos por apoyos ya se han sustituido por cero):

$$p_3^{(1)}\,(A=\infty) = q_4 = 0$$
$$p_3^{(2)}\,(A=\infty) = -q_4 + q_6 = 0$$
$$p_3^{(3)}\,(A=\infty) = -q_6 + q_8 = 0$$
$$p_1^{(4)}\,(I=\infty) = \frac{1}{5}\,q_8 + q_9 - \frac{1}{5}\,q_{11} = 0$$
$$p_2^{(4)}\,(I=\infty) = \frac{1}{5}\,q_8 - \frac{1}{5}\,q_{11} + q_{12} = 0$$
$$p_3^{(4)}\,(A=\infty) = -q_3 + q_{10} = 0$$
$$p_3^{(5)}\,(A=\infty) = q_{11} - q_{14} = 0$$
$$p_3^{(6)}\,(A=\infty) = q_{14} - q_{17} = 0$$
$$p_3^{(7)}\,(A=\infty) = q_{17} = 0$$
$$p_1^{(8)}\,(I=\infty) = \frac{1}{5}\,q_6 + q_7 - \frac{1}{5}\,q_{14} = 0$$
$$p_2^{(8)}\,(I=\infty) = \frac{1}{5}\,q_6 - \frac{1}{5}\,q_{14} + q_{15} = 0$$
$$p_3^{(8)}\,(A=\infty) = -q_2 + q_{13} = 0$$
$$p_1^{(9)}\,(I=\infty) = \frac{1}{5}\,q_4 + q_5 - \frac{1}{5}\,q_{17} = 0$$
$$p_2^{(9)}\,(I=\infty) = \frac{1}{5}\,q_4 - \frac{1}{5}\,q_{17} + q_{18} = 0$$
$$p_3^{(9)}\,(A=\infty) = -q_1 + q_{16} = 0$$

De estas 15 ecuaciones, 15 son independientes. Despejando, los GDL dependientes quedan en función de los independientes:

$$
\begin{aligned}
q_4 &= 0 \\
q_5 &= 0 \\
q_6 &= 0 \\
q_7 &= 0 \\
q_8 &= 0 \\
q_9 &= 0 \\
q_{10} &= q_3 \\
q_{11} &= 0 \\
q_{12} &= 0 \\
q_{13} &= q_2 \\
q_{14} &= 0 \\
q_{15} &= 0 \\
q_{16} &= q_1 \\
q_{17} &= 0 \\
q_{18} &= 0
\end{aligned}
$$

En forma matricial, $q_{\text{libres}} = \Gamma\, q_{\text{ind}}$: cada columna de Γ es un estado unitario de un GDL independiente, con los dependientes ya arrastrados por las ligaduras. Comprobación: cada ecuación independiente despeja un GDL libre, así que

$$\text{NGL} = 18 - 15 = 3$$

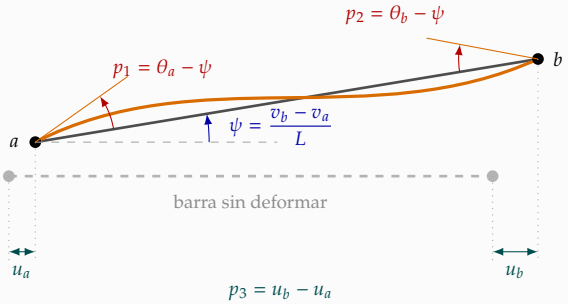
el mismo valor que da el conteo. Las incógnitas del sistema son q_1, q_2, q_3; q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{15}, q_{16}, q_{17}, q_{18} quedan determinados por las ligaduras.

1.2 Coordenadas de elemento p: deformaciones de cada barra

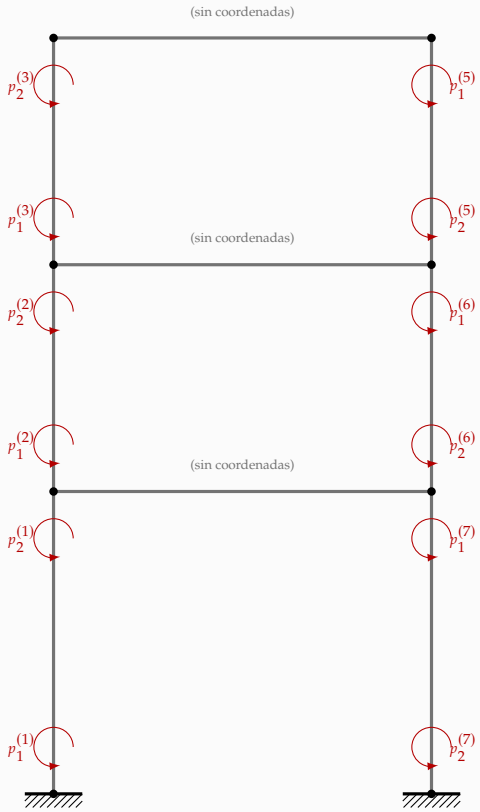
De los seis desplazamientos de extremo de una barra, tres son movimientos de **cuerpo rígido** y no producen esfuerzo. Sobran, por tanto, y el método los deja fuera: cada barra se describe con las **tres deformaciones** que sí lo producen, medidas siempre *respecto de su propia cuerda*:

$$p_1 = \theta_a - \psi, \qquad p_2 = \theta_b - \psi, \qquad p_3 = u_b - u_a, \qquad \psi = \frac{v_b - v_a}{L}$$

con u, v los desplazamientos de extremo en ejes *locales* de la barra (u a lo largo de ella, v perpendicular) y ψ el giro de la cuerda. Sus fuerzas conjugadas son $P = (M_a, M_b, N)$.



*Las tres coordenadas de elemento. Los giros p_1 y p_2 se miden entre la tangente y la **cuerda** (no entre la tangente y la posición inicial): por eso aparece ψ, y por eso un simple desplazamiento de nudo, sin que ningún nudo gire, ya deforma la barra.*



Coordenadas de elemento sobre la estructura: en rojo los giros de extremo y en verde los alargamientos. En total, 12 coordenadas.

En una barra **rígida** la deformación restringida tampoco es coordenada: vale cero por ligadura, no por cálculo.

Fila	Coordenada	Barra	Significado
1	$p_1^{(1)}$	1 (A–B)	giro del extremo inicial respecto de la cuerda
2	$p_2^{(1)}$	1 (A–B)	giro del extremo final respecto de la cuerda
3	$p_1^{(2)}$	2 (B–C)	giro del extremo inicial respecto de la cuerda
4	$p_2^{(2)}$	2 (B–C)	giro del extremo final respecto de la cuerda
5	$p_1^{(3)}$	3 (C–D)	giro del extremo inicial respecto de la cuerda
6	$p_2^{(3)}$	3 (C–D)	giro del extremo final respecto de la cuerda
7	$p_1^{(5)}$	5 (E–F)	giro del extremo inicial respecto de la cuerda
8	$p_2^{(5)}$	5 (E–F)	giro del extremo final respecto de la cuerda
9	$p_1^{(6)}$	6 (F–G)	giro del extremo inicial respecto de la cuerda
10	$p_2^{(6)}$	6 (F–G)	giro del extremo final respecto de la cuerda
11	$p_1^{(7)}$	7 (G–H)	giro del extremo inicial respecto de la cuerda
12	$p_2^{(7)}$	7 (G–H)	giro del extremo final respecto de la cuerda

Paso 2 Matriz de rigidez no acoplada k

Cada barra tiene su propia relación entre deformaciones y fuerzas, $P = k\,p$, deducida de la viga de Euler-Bernoulli:

$$k = \begin{array}{c} \begin{matrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix}$$

Se la llama **no acoplada** porque en ella cada barra solo se ve a sí misma: nada de lo que le ocurra a una barra aparece en la de al lado. El acoplamiento, el hecho de que las barras compartan nudos, lo introduce después la matriz A.

2.1 Rigidez de cada barra

Barra 1 (A–B) — Axialmente rígida ($A = \infty$)

$L = 4$ m, $\theta = 90°$, $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = 1$.

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(2\cdot 10^8)(1\cdot 10^{-4})}{4} = 20000, \quad \frac{2EI}{L} = 10000$$

$$k_1 = 10^4 \cdot \begin{matrix} \\ p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} p_1^{(1)} & p_2^{(1)} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Restricción cinemática: $p_3 = 0$, así que esas filas y columnas desaparecen de k: una deformación impedida no almacena energía.

Barra 2 (B–C) — Axialmente rígida ($A = \infty$)

$L = 3$ m, $\theta = 90°$, $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = 1$.

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(2\cdot 10^8)(1\cdot 10^{-4})}{3} = 26670, \quad \frac{2EI}{L} = 13330$$

$$k_2 = 10^4 \cdot \begin{matrix} \\ p_1^{(2)} \\ p_2^{(2)} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} p_1^{(2)} & p_2^{(2)} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2.667 & 1.333 \\ 1.333 & 2.667 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Restricción cinemática: $p_3 = 0$, así que esas filas y columnas desaparecen de k: una deformación impedida no almacena energía.

Barra 3 (C–D) — Axialmente rígida ($A = \infty$)

$L = 3$ m, $\theta = 90°$, $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = 1$.

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(2\cdot 10^8)(1\cdot 10^{-4})}{3} = 26670, \quad \frac{2EI}{L} = 13330$$

$$k_3 = 10^4 \cdot \begin{matrix} \\ p_1^{(3)} \\ p_2^{(3)} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} p_1^{(3)} & p_2^{(3)} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2.667 & 1.333 \\ 1.333 & 2.667 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Restricción cinemática: $p_3 = 0$, así que esas filas y columnas desaparecen de k: una deformación impedida no almacena energía.

Barra 4 (D–E) — Totalmente rígida ($A = I = \infty$)

$L = 5$ m, $\theta = 0°$, $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = 0$. Totalmente rígida: $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, no aporta rigidez interna alguna ni coordenadas al sistema. Sus esfuerzos son enteramente fuerzas de ligadura (apartado 6).

Barra 5 (E–F) — Axialmente rígida ($A = \infty$)

$L = 3$ m, $\theta = -90°$, $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = -1$.

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(2\cdot 10^8)(1\cdot 10^{-4})}{3} = 26670, \quad \frac{2EI}{L} = 13330$$

$$k_5 = 10^4 \cdot \begin{matrix} \\ p_1^{(5)} \\ p_2^{(5)} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} p_1^{(5)} & p_2^{(5)} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2.667 & 1.333 \\ 1.333 & 2.667 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Restricción cinemática: $p_3 = 0$, así que esas filas y columnas desaparecen de k: una deformación impedida no almacena energía.

Barra 6 (F–G) — Axialmente rígida ($A = \infty$)

$L = 3$ m, $\theta = -90°$, $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = -1$.

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(2 \cdot 10^8)(1 \cdot 10^{-4})}{3} = 26670, \quad \frac{2EI}{L} = 13330$$

$$k_6 = 10^4 \cdot \begin{matrix} \\ p_1^{(6)} \\ p_2^{(6)} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} p_1^{(6)} & p_2^{(6)} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2.667 & 1.333 \\ 1.333 & 2.667 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Restricción cinemática: $p_3 = 0$, así que esas filas y columnas desaparecen de k: una deformación impedida no almacena energía.

Barra 7 (G–H) — Axialmente rígida ($A = \infty$)

$L = 4$ m, $\theta = -90°$, $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = -1$.

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(2 \cdot 10^8)(1 \cdot 10^{-4})}{4} = 20000, \quad \frac{2EI}{L} = 10000$$

$$k_7 = 10^4 \cdot \begin{matrix} \\ p_1^{(7)} \\ p_2^{(7)} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} p_1^{(7)} & p_2^{(7)} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Restricción cinemática: $p_3 = 0$, así que esas filas y columnas desaparecen de k: una deformación impedida no almacena energía.

Barra 8 (C–F) — Totalmente rígida ($A = I = \infty$)

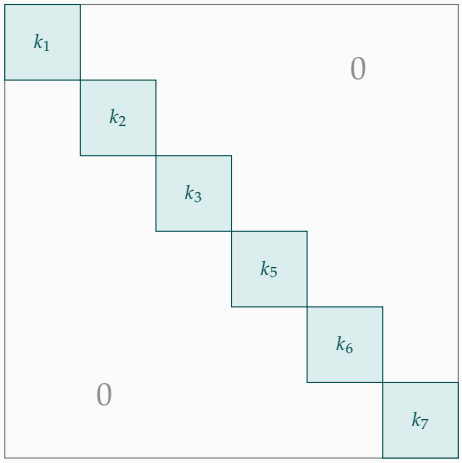
$L = 5$ m, $\theta = 0°$, $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = 0$. Totalmente rígida: $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, no aporta rigidez interna alguna ni coordenadas al sistema. Sus esfuerzos son enteramente fuerzas de ligadura (apartado 6).

Barra 9 (B–G) — Totalmente rígida ($A = I = \infty$)

$L = 5$ m, $\theta = 0°$, $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = 0$. Totalmente rígida: $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, no aporta rigidez interna alguna ni coordenadas al sistema. Sus esfuerzos son enteramente fuerzas de ligadura (apartado 6).

2.2 Ensamblaje diagonal por bloques

Como ninguna barra ve a las demás, la rigidez de todo el conjunto es la simple yuxtaposición de las anteriores: una matriz **diagonal por bloques**, con la k de cada barra en su sitio y ceros fuera.



Estructura de k: un bloque por barra, de tamaño igual a su número de coordenadas. La matriz completa es 12×12.

$$k = \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_m \end{bmatrix}$$

$$k = 10^4 \cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} p_1^{(1)} & p_2^{(1)} & p_1^{(2)} & p_2^{(2)} & p_1^{(3)} & p_2^{(3)} & p_1^{(5)} & p_2^{(5)} & p_1^{(6)} & p_2^{(6)} & p_1^{(7)} & p_2^{(7)} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.667 & 1.333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.333 & 2.667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.667 & 1.333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.333 & 2.667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.667 & 1.333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.333 & 2.667 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.667 & 1.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.333 & 2.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \\ p_1^{(2)} \\ p_2^{(2)} \\ p_1^{(3)} \\ p_2^{(3)} \\ p_1^{(5)} \\ p_2^{(5)} \\ p_1^{(6)} \\ p_2^{(6)} \\ p_1^{(7)} \\ p_2^{(7)} \end{matrix}$$

Paso 3 Construcción de la matriz de compatibilidad A

A es la que relaciona los dos sistemas de coordenadas:

$$p = A\,q$$

No hay nada que *recordar* en A: cada columna se **dibuja**. La columna j es la respuesta a una pregunta puramente geométrica, *si muevo solo el GDL j una unidad y dejo los demás quietos, ¿cuánto se deforma cada barra?*, y se contesta proyectando el movimiento de los nudos sobre los ejes de cada barra:

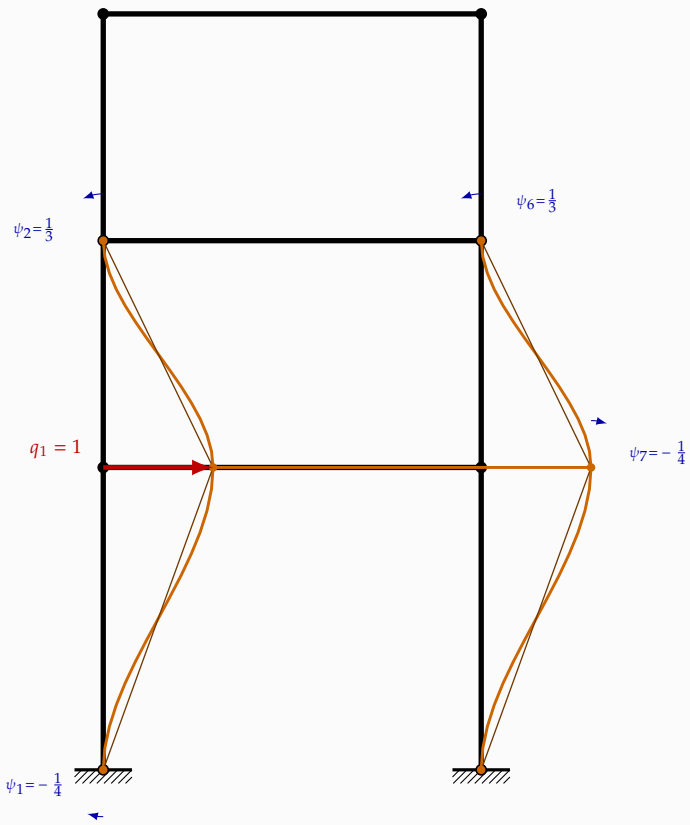
$$u = q_x \cos\theta + q_y \sin\theta, \qquad v = -q_x \sin\theta + q_y \cos\theta, \qquad \psi = \frac{v_b - v_a}{L}$$

y de ahí $p_1 = \theta_a - \psi$, $p_2 = \theta_b - \psi$, $p_3 = u_b - u_a$. Al ser lineal en q, basta hacerlo una vez por GDL. Ojo con los GDL **dependientes**: en estos estados *no* son nulos. Toman el valor que exigen las ligaduras, y eso es justo lo que hace que una barra rígida arrastre a las demás.

3.1 Estado $q_1 = 1$ — traslación horizontal del nudo B

Las ligaduras arrastran a los GDL dependientes:

$q_4 = 0,\quad q_5 = 0,\quad q_6 = 0,\quad q_7 = 0,\quad q_8 = 0,\quad q_9 = 0,\quad q_{10} = 0,\quad q_{11} = 0,\quad q_{12} = 0,\quad q_{13} = 0,\quad q_{14} = 0,\quad q_{15} = 0,\quad q_{16} = 1,\quad q_{17} = 0,\quad q_{18} = 0$



$$A_{\cdot 1} = \begin{matrix} q_1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{matrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \\ p_1^{(2)} \\ p_2^{(2)} \\ p_1^{(3)} \\ p_2^{(3)} \\ p_1^{(5)} \\ p_2^{(5)} \\ p_1^{(6)} \\ p_2^{(6)} \\ p_1^{(7)} \\ p_2^{(7)} \end{matrix}$$

*Estado $q_1 = 1$ con los demás GDL independientes nulos. En negro grueso, la estructura original; en naranja, la deformada (trazo grueso, la elástica; fino, donde la barra se curva, la **cuerda**, de donde se miden p_1, p_2 y p_3); en azul el giro de cuerda ψ, en verde el alargamiento y en rojo la descomposición del desplazamiento en ejes de la barra. A la derecha, la columna de A de este estado: cada valor es la deformación p de su fila, que se calcula a continuación.*

Proyectando sobre los ejes de cada barra:

Barra 1 $(A$–$B)$: $\quad L = 4, \quad \cos\theta = 0, \quad \sin\theta = 1$

$$u_a = 0, \quad v_a = 0, \quad \theta_a = 0 \qquad u_b = 0, \quad v_b = -1, \quad \theta_b = 0$$

$$\psi = \frac{v_b - v_a}{L} = \frac{-1 - (0)}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$p_1^{(1)} = \theta_a - \psi = \frac{1}{4}, \qquad p_2^{(1)} = \theta_b - \psi = \frac{1}{4}$$

Barra 2 $(B\text{–}C)$: $\quad L = 3, \quad \cos\theta = 0, \quad \sin\theta = 1$

$$u_a = 0, \quad v_a = -1, \quad \theta_a = 0 \qquad u_b = 0, \quad v_b = 0, \quad \theta_b = 0$$

$$\psi = \frac{v_b - v_a}{L} = \frac{0-(-1)}{3} = \frac{1}{3}$$

$$p_1^{(2)} = \theta_a - \psi = -\frac{1}{3}, \qquad p_2^{(2)} = \theta_b - \psi = -\frac{1}{3}$$

Barra 6 $(F\text{–}G)$: $\quad L = 3, \quad \cos\theta = 0, \quad \sin\theta = -1$

$$u_a = 0, \quad v_a = 0, \quad \theta_a = 0 \qquad u_b = 0, \quad v_b = 1, \quad \theta_b = 0$$

$$\psi = \frac{v_b - v_a}{L} = \frac{1-(0)}{3} = \frac{1}{3}$$

$$p_1^{(6)} = \theta_a - \psi = -\frac{1}{3}, \qquad p_2^{(6)} = \theta_b - \psi = -\frac{1}{3}$$

Barra 7 $(G\text{–}H)$: $\quad L = 4, \quad \cos\theta = 0, \quad \sin\theta = -1$

$$u_a = 0, \quad v_a = 1, \quad \theta_a = 0 \qquad u_b = 0, \quad v_b = 0, \quad \theta_b = 0$$

$$\psi = \frac{v_b - v_a}{L} = \frac{0-(1)}{4} = -\frac{1}{4}$$

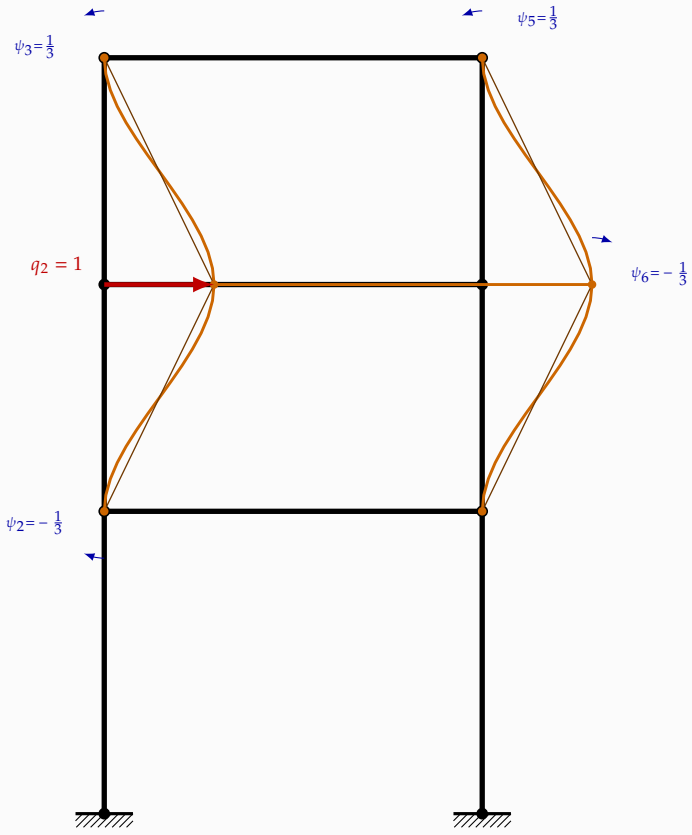
$$p_1^{(7)} = \theta_a - \psi = \frac{1}{4}, \qquad p_2^{(7)} = \theta_b - \psi = \frac{1}{4}$$

Las barras 3, 5 no se mueven en este estado: sus deformaciones son nulas.

3.2 Estado $q_2 = 1$ — traslación horizontal del nudo C

Las ligaduras arrastran a los GDL dependientes:

$$q_4 = 0, \quad q_5 = 0, \quad q_6 = 0, \quad q_7 = 0, \quad q_8 = 0, \quad q_9 = 0, \quad q_{10} = 0, \quad q_{11} = 0, \quad q_{12} = 0, \quad q_{13} = 1, \quad q_{14} = 0, \quad q_{15} = 0, \quad q_{16} = 0, \quad q_{17} = 0, \quad q_{18} = 0$$



$$A_{\cdot 2} = \begin{matrix} q_2 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & p_1^{(1)} \\ 0 & p_2^{(1)} \\ \frac{1}{3} & p_1^{(2)} \\ \frac{1}{3} & p_2^{(2)} \\ -\frac{1}{3} & p_1^{(3)} \\ -\frac{1}{3} & p_2^{(3)} \\ -\frac{1}{3} & p_1^{(5)} \\ -\frac{1}{3} & p_2^{(5)} \\ \frac{1}{3} & p_1^{(6)} \\ \frac{1}{3} & p_2^{(6)} \\ 0 & p_1^{(7)} \\ 0 & p_2^{(7)} \end{bmatrix}$$

*Estado $q_2 = 1$ con los demás GDL independientes nulos. En negro grueso, la estructura original; en naranja, la deformada (trazo grueso, la elástica; fino, donde la barra se curva, la **cuerda**, de donde se miden p_1, p_2 y p_3); en azul el giro de cuerda ψ, en verde el alargamiento y en rojo la descomposición del desplazamiento en ejes de la barra. A la derecha, la columna de A de este estado: cada valor es la deformación p de su fila, que se calcula a continuación.*

Proyectando sobre los ejes de cada barra:

Barra 2 $(B$–$C)$: $\quad L = 3, \quad \cos\theta = 0, \quad \sin\theta = 1$

$$u_a = 0, \quad v_a = 0, \quad \theta_a = 0 \qquad u_b = 0, \quad v_b = -1, \quad \theta_b = 0$$

$$\psi = \frac{v_b - v_a}{L} = \frac{-1-(0)}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$p_1^{(2)} = \theta_a - \psi = \frac{1}{3}, \qquad p_2^{(2)} = \theta_b - \psi = \frac{1}{3}$$

Barra 3 $(C\text{–}D)$: $\quad L = 3, \quad \cos\theta = 0, \quad \sin\theta = 1$

$$u_a = 0, \quad v_a = -1, \quad \theta_a = 0 \qquad u_b = 0, \quad v_b = 0, \quad \theta_b = 0$$

$$\psi = \frac{v_b - v_a}{L} = \frac{0-(-1)}{3} = \frac{1}{3}$$

$$p_1^{(3)} = \theta_a - \psi = -\frac{1}{3}, \qquad p_2^{(3)} = \theta_b - \psi = -\frac{1}{3}$$

Barra 5 $(E\text{–}F)$: $\quad L = 3, \quad \cos\theta = 0, \quad \sin\theta = -1$

$$u_a = 0, \quad v_a = 0, \quad \theta_a = 0 \qquad u_b = 0, \quad v_b = 1, \quad \theta_b = 0$$

$$\psi = \frac{v_b - v_a}{L} = \frac{1-(0)}{3} = \frac{1}{3}$$

$$p_1^{(5)} = \theta_a - \psi = -\frac{1}{3}, \qquad p_2^{(5)} = \theta_b - \psi = -\frac{1}{3}$$

Barra 6 $(F\text{–}G)$: $\quad L = 3, \quad \cos\theta = 0, \quad \sin\theta = -1$

$$u_a = 0, \quad v_a = 1, \quad \theta_a = 0 \qquad u_b = 0, \quad v_b = 0, \quad \theta_b = 0$$

$$\psi = \frac{v_b - v_a}{L} = \frac{0-(1)}{3} = -\frac{1}{3}$$

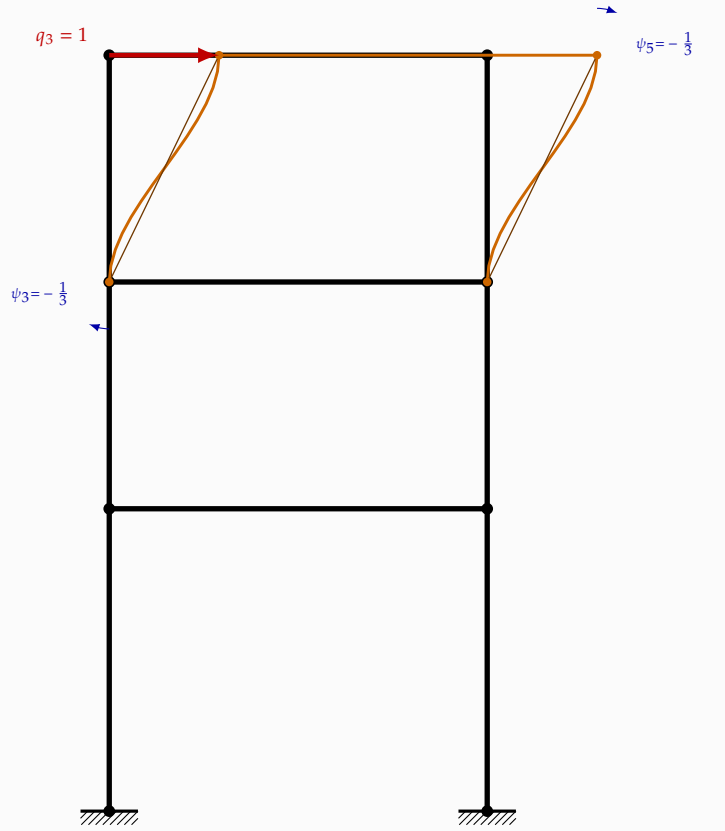
$$p_1^{(6)} = \theta_a - \psi = \frac{1}{3}, \qquad p_2^{(6)} = \theta_b - \psi = \frac{1}{3}$$

Las barras 1, 7 no se mueven en este estado: sus deformaciones son nulas.

3.3 Estado $q_3 = 1$ — traslación horizontal del nudo D

Las ligaduras arrastran a los GDL dependientes:

$$q_4 = 0, \quad q_5 = 0, \quad q_6 = 0, \quad q_7 = 0, \quad q_8 = 0, \quad q_9 = 0, \quad q_{10} = 1, \quad q_{11} = 0, \quad q_{12} = 0, \quad q_{13} = 0, \quad q_{14} = 0, \quad q_{15} = 0, \quad q_{16} = 0, \quad q_{17} = 0, \quad q_{18} = 0$$



$$A_{\cdot 3} = \begin{matrix} q_3 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \\ p_1^{(2)} \\ p_2^{(2)} \\ p_1^{(3)} \\ p_2^{(3)} \\ p_1^{(5)} \\ p_2^{(5)} \\ p_1^{(6)} \\ p_2^{(6)} \\ p_1^{(7)} \\ p_2^{(7)} \end{matrix}$$

*Estado $q_3 = 1$ con los demás GDL independientes nulos. En negro grueso, la estructura original; en naranja, la deformada (trazo grueso, la elástica; fino, donde la barra se curva, la **cuerda**, de donde se miden p_1, p_2 y p_3); en azul el giro de cuerda ψ, en verde el alargamiento y en rojo la descomposición del desplazamiento en ejes de la barra. A la derecha, la columna de A de este estado: cada valor es la deformación p de su fila, que se calcula a continuación.*

Proyectando sobre los ejes de cada barra:

Barra 3 $(C$–$D)$: $\quad L = 3, \quad \cos\theta = 0, \quad \sin\theta = 1$

$$u_a = 0, \quad v_a = 0, \quad \theta_a = 0 \qquad u_b = 0, \quad v_b = -1, \quad \theta_b = 0$$

$$\psi = \frac{v_b - v_a}{L} = \frac{-1 - (0)}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$p_1^{(3)} = \theta_a - \psi = \frac{1}{3}, \qquad p_2^{(3)} = \theta_b - \psi = \frac{1}{3}$$

Barra 5 $(E$–$F)$: $\quad L = 3, \quad \cos\theta = 0, \quad \sin\theta = -1$

$$u_a = 0, \quad v_a = 1, \quad \theta_a = 0 \qquad u_b = 0, \quad v_b = 0, \quad \theta_b = 0$$

$$\psi = \frac{v_b - v_a}{L} = \frac{0-(1)}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$p_1^{(5)} = \theta_a - \psi = \frac{1}{3}, \qquad p_2^{(5)} = \theta_b - \psi = \frac{1}{3}$$

Las barras 1, 2, 6, 7 no se mueven en este estado: sus deformaciones son nulas.

Matriz de compatibilidad completa

Colocando cada columna en su sitio:

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \\ p_1^{(2)} \\ p_2^{(2)} \\ p_1^{(3)} \\ p_2^{(3)} \\ p_1^{(5)} \\ p_2^{(5)} \\ p_1^{(6)} \\ p_2^{(6)} \\ p_1^{(7)} \\ p_2^{(7)} \end{matrix}$$

Paso 4 Ensamblaje de la matriz estructural K

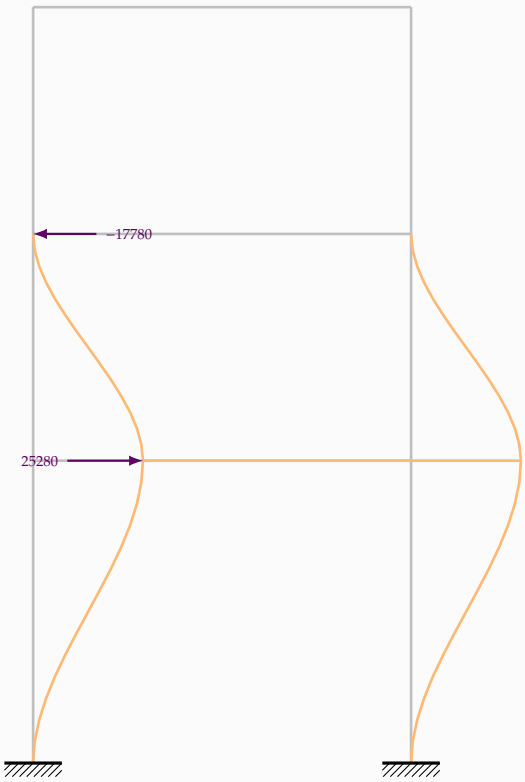
Con las dos matrices anteriores, la rigidez de la estructura completa sale de un solo producto. La razón es el principio de los trabajos virtuales: si $p = A\,q$, entonces las fuerzas se transforman con la traspuesta, $Q = A^T P$, y sustituyendo $P = k\,p = k\,A\,q$:

$$Q = A^T P = A^T k\,A\,q \quad \Longrightarrow \quad \boxed{K = A^T k\,A}$$

Leído de derecha a izquierda: A convierte desplazamientos de nudo en deformaciones de barra, k convierte esas deformaciones en fuerzas de barra, y A^T devuelve esas fuerzas a los nudos. El acoplamiento entre barras aparece aquí, al sumar en el mismo nudo lo que aporta cada una.

$$K = A^T k\,A = 10^4 \cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2.528 & -1.778 & 0 \\ -1.778 & 3.556 & -1.778 \\ 0 & -1.778 & 1.778 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{matrix}$$

Cada columna de K tiene lectura directa: son las **fuerzas que hay que aplicar en los nudos para mantener** el estado unitario correspondiente.



Interpretación de la primera columna de K: fuerzas necesarias para sostener el estado $q_1 = 1$. Las asociadas a una traslación están en kN por unidad de desplazamiento; las de un giro, en kN m por radián.

La simetría de K no es casualidad: es el teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti, que el triple producto $A^T k\, A$ garantiza por construcción al ser k simétrica.

Paso 5 Cálculo de los desplazamientos

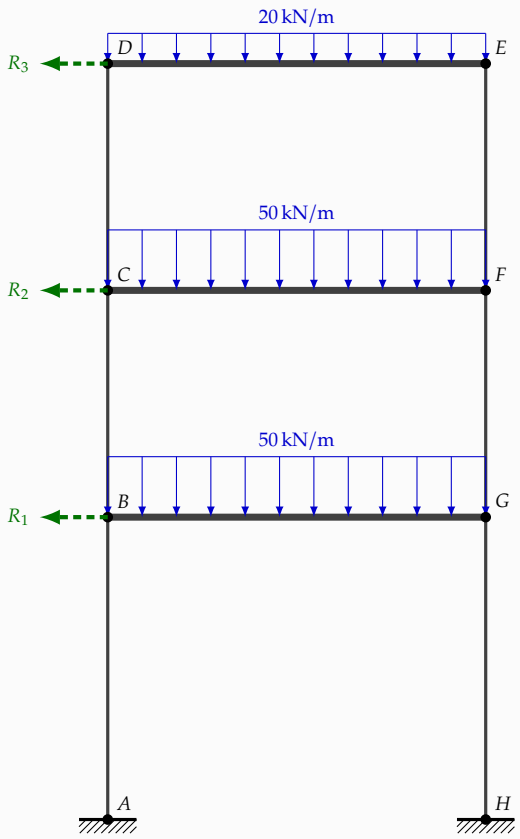
5.1 Vector de cargas Q

El sistema $K\, q = Q$ está escrito en las coordenadas q, así que Q solo puede contener fuerzas aplicadas en ellas. Para llevar allí todas las cargas, las de los nudos y las que actúan sobre los elementos, la solución se descompone en dos problemas:

Solución = problema primario + problema complementario

En el **problema primario** actúan todas las cargas y, para que ningún nudo se mueva ($q = 0$), unas **fuerzas de fijación** $R_1, \ldots, R_3$, una por coordenada, dibujadas en sentido *contrario* a su GDL. Se resuelve en dos partes: el equilibrio de los elementos y el equilibrio de las juntas.

Problema primario ($q = 0$)

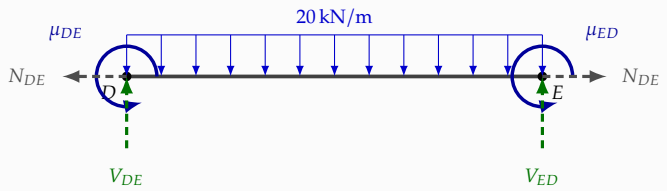


Problema primario ($q = 0$): las cargas de la estructura y las fuerzas de fijación R (verde, a trazos), contrarias a los GDL.

i) Equilibrio de elementos

Con $q = 0$ ningún nudo se mueve: cada barra trabaja como empotrada en sus dos extremos. Las barras 1 (A–B), 2 (B–C), 3 (C–D), 5 (E–F), 6 (F–G) y 7 (G–H) no llevan carga en el vano, pero no se alargan ($A = \infty$): sus axiles no salen de la rigidez, son las incógnitas N_{AB}, N_{BC}, N_{CD}, N_{EF}, N_{FG} y N_{GH} (tracción positiva).

Barra 4 (D–E): $A = I = \infty$ La barra no trabaja a flexión ($I = \infty$): como $p_1 = p_2 = 0$ por ligadura, sus momentos de extremo no salen de la rigidez, sino que son incógnitas: μ_{DE} y μ_{ED} (antihorario positivo, como los MEP). Son momentos *totales*: los de empotramiento de la carga más lo que añade la condición $I = \infty$. El sentido positivo es arbitrario; lo importante es que los cortantes concuerden con ellos para que haya equilibrio. Tampoco se alarga ($A = \infty$): su axil es otra incógnita, N_{DE} (tracción positiva).



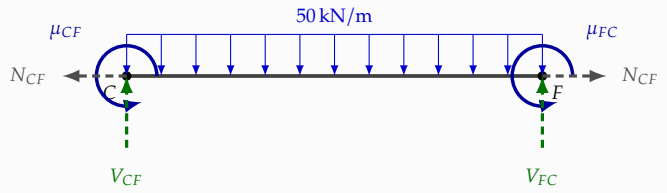
Barra D–E en el problema primario: la carga del vano y las fuerzas incógnita en sus extremos (a trazos).

El cortante es el que produce la carga más el que producen los momentos. Cargas del vano: resultante $R_q = -100$ (según y') y momento respecto a E: $M_q = 250$.

$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{DE} = \frac{\mu_{DE} + \mu_{ED} + M_q}{L} = \frac{\mu_{DE} + \mu_{ED} + 250}{5} = 50 + \frac{\mu_{DE} + \mu_{ED}}{5}$$

$$\sum F_{y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{ED} = -R_q - V_{DE} = 50 - \frac{\mu_{DE} + \mu_{ED}}{5}$$

Barra 8 (C–F): $A = I = \infty$ La barra no trabaja a flexión ($I = \infty$): como $p_1 = p_2 = 0$ por ligadura, sus momentos de extremo no salen de la rigidez, sino que son incógnitas: μ_{CF} y μ_{FC} (antihorario positivo, como los MEP). Son momentos *totales*: los de empotramiento de la carga más lo que añade la condición $I = \infty$. El sentido positivo es arbitrario; lo importante es que los cortantes concuerden con ellos para que haya equilibrio. Tampoco se alarga ($A = \infty$): su axil es otra incógnita, N_{CF} (tracción positiva).



Barra C–F en el problema primario: la carga del vano y las fuerzas incógnita en sus extremos (a trazos).

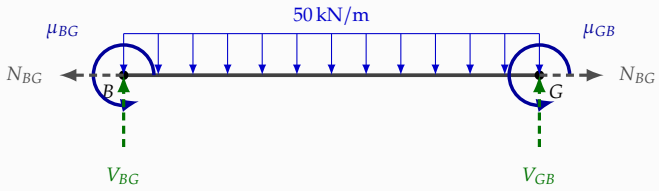
El cortante es el que produce la carga más el que producen los momentos. Cargas del vano: resultante $R_q = -250$ (según y') y momento respecto a F: $M_q = 625$.

$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_F = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{CF} = \frac{\mu_{CF} + \mu_{FC} + M_q}{L} = \frac{\mu_{CF} + \mu_{FC} + 625}{5} = 125 + \frac{\mu_{CF} + \mu_{FC}}{5}$$

$$\sum F_{y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{FC} = -R_q - V_{CF} = 125 - \frac{\mu_{CF} + \mu_{FC}}{5}$$

Barra 9 (B–G): $A = I = \infty$ La barra no trabaja a flexión ($I = \infty$): como $p_1 = p_2 = 0$ por ligadura, sus momentos de extremo no salen de la rigidez, sino que son incógnitas: μ_{BG} y μ_{GB} (antihorario positivo, como los MEP). Son momentos *totales*: los de empotramiento de la carga más lo que añade la condición $I = \infty$. El sentido positivo es arbitrario; lo importante es

que los cortantes concuerden con ellos para que haya equilibrio. Tampoco se alarga ($A = \infty$): su axil es otra incógnita, N_{BG} (tracción positiva).



Barra B–G en el problema primario: la carga del vano y las fuerzas incógnita en sus extremos (a trazos).

El cortante es el que produce la carga más el que producen los momentos. Cargas del vano: resultante $R_q = -250$ (según y') y momento respecto a G: $M_q = 625$.

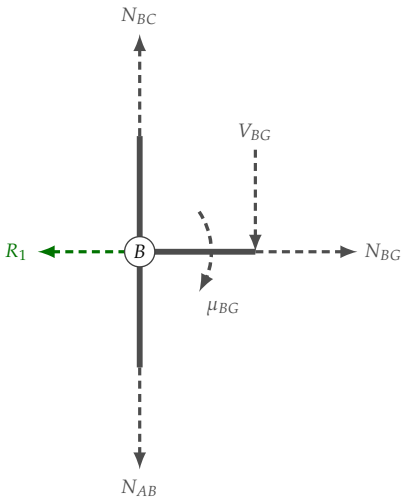
$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_G = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{BG} = \frac{\mu_{BG} + \mu_{GB} + M_q}{L} = \frac{\mu_{BG} + \mu_{GB} + 625}{5} = 125 + \frac{\mu_{BG} + \mu_{GB}}{5}$$

$$\sum F_{y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{GB} = -R_q - V_{BG} = 125 - \frac{\mu_{BG} + \mu_{GB}}{5}$$

ii) Equilibrio de juntas

Cada junta tiene que estar en equilibrio: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum M = 0$, una ecuación por cada GDL libre (en una dirección que impide un apoyo, lo absorbe su reacción y no se escribe). Se separa cada junta con las cargas aplicadas en ella, las fuerzas que le transmiten las barras (las del paso anterior, cambiadas de sentido) y las fuerzas de fijación. En el dibujo, las fuerzas de las barras van en la punta de su muñón para que se vea de qué barra vienen, pero actúan en la propia junta: en $\sum M$ solo entran los momentos. En azul, lo ya conocido; en negro a trazos, lo que depende de una incógnita.

Junta B



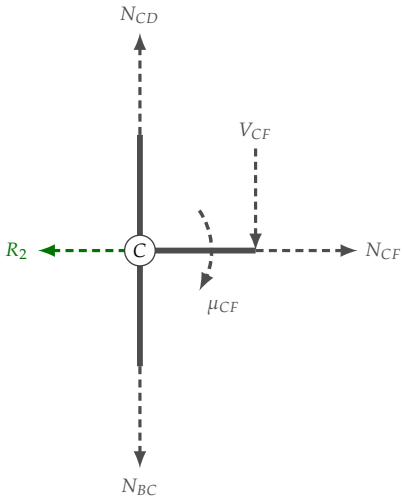
$$(\rightarrow +)\ \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{BG} - R_1 = 0 \quad \text{... (I)}$$

$$(\uparrow +)\ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_{AB} + N_{BC} - V_{BG} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -N_{AB} + N_{BC} - \tfrac{1}{5}\,\mu_{BG} - \tfrac{1}{5}\,\mu_{GB} - 125 = 0 \quad \text{... (II)}$$

$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -\mu_{BG} = 0 \quad \text{... (III)}$$

Junta C



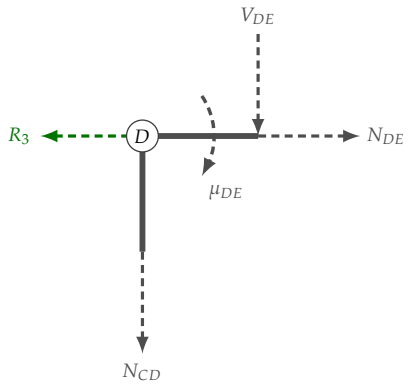
$$(\rightarrow +)\ \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{CF} - R_2 = 0 \quad \text{... (IV)}$$

$$(\uparrow +)\ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_{BC} + N_{CD} - V_{CF} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -N_{BC} + N_{CD} - \tfrac{1}{5}\,\mu_{CF} - \tfrac{1}{5}\,\mu_{FC} - 125 = 0 \quad \text{... (V)}$$

$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad -\mu_{CF} = 0 \quad \text{... (VI)}$$

Junta D



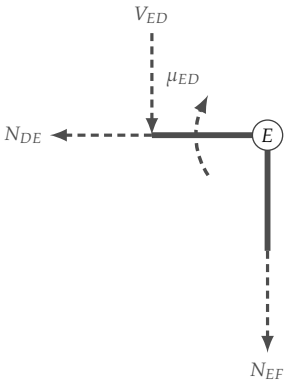
$$(\rightarrow +)\ \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{DE} - R_3 = 0 \quad \text{... (VII)}$$

$$(\uparrow +)\ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_{CD} - V_{DE} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -N_{CD} - \tfrac{1}{5}\,\mu_{DE} - \tfrac{1}{5}\,\mu_{ED} - 50 = 0 \quad \text{... (VIII)}$$

$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad -\mu_{DE} = 0 \quad \text{... (IX)}$$

Junta E



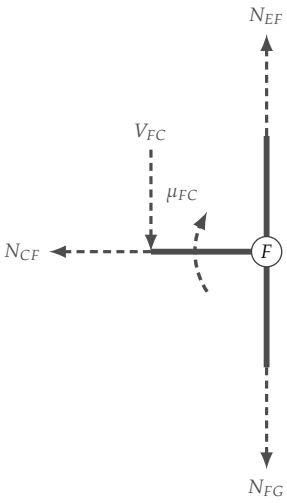
$$(\rightarrow +)\ \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_{DE} = 0 \quad \text{... (X)}$$

$$(\uparrow +)\ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{ED} - N_{EF} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{5}\,\mu_{DE} + \tfrac{1}{5}\,\mu_{ED} - N_{EF} - 50 = 0 \quad \text{... (XI)}$$

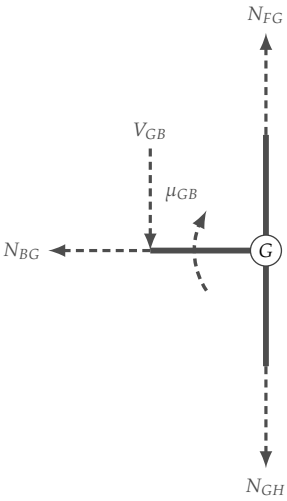
$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad -\mu_{ED} = 0 \quad \text{... (XII)}$$

Junta F



$$
\begin{aligned}
(\rightarrow +)\ \textstyle\sum F_x = 0 \quad &\Rightarrow \quad -N_{CF} = 0 \quad \text{... (XIII)} \\
(\uparrow +)\ \textstyle\sum F_y = 0 \quad &\Rightarrow \quad N_{EF} - N_{FG} - V_{FC} = 0 \\
&\Rightarrow \quad N_{EF} - N_{FG} + \tfrac{1}{5}\,\mu_{CF} + \tfrac{1}{5}\,\mu_{FC} - 125 = 0 \quad \text{... (XIV)} \\
(\circlearrowleft +)\ \textstyle\sum M_F = 0 \quad &\Rightarrow \quad -\mu_{FC} = 0 \quad \text{... (XV)}
\end{aligned}
$$

Junta G



$$
\begin{aligned}
(\rightarrow +)\ \textstyle\sum F_x = 0 \quad &\Rightarrow \quad -N_{BG} = 0 \quad \text{... (XVI)} \\
(\uparrow +)\ \textstyle\sum F_y = 0 \quad &\Rightarrow \quad N_{FG} - N_{GH} - V_{GB} = 0 \\
&\Rightarrow \quad N_{FG} - N_{GH} + \tfrac{1}{5}\,\mu_{BG} + \tfrac{1}{5}\,\mu_{GB} - 125 = 0 \quad \text{... (XVII)} \\
(\circlearrowleft +)\ \textstyle\sum M_G = 0 \quad &\Rightarrow \quad -\mu_{GB} = 0 \quad \text{... (XVIII)}
\end{aligned}
$$

Solución del sistema Son 18 ecuaciones con 18 incógnitas: las 15 fuerzas de las ligaduras y las 3 fijaciones. Las ecuaciones sin fijaciones (las de los GDL dependientes) dan primero las fuerzas de las ligaduras; después, cada fijación sale de la ecuación de su propio GDL, la única en la que aparece:

$$\text{(III)} \quad -\mu_{BG} = 0 \Rightarrow \mu_{BG} = \boxed{0}$$

$$\text{(VI)} \quad -\mu_{CF} = 0 \Rightarrow \mu_{CF} = \boxed{0}$$

$$\text{(IX)} \quad -\mu_{DE} = 0 \Rightarrow \mu_{DE} = \boxed{0}$$

$$\text{(X)} \quad -N_{DE} = 0 \Rightarrow N_{DE} = \boxed{0}$$

$$\text{(XII)} \quad -\mu_{ED} = 0 \Rightarrow \mu_{ED} = \boxed{0}$$

$$\text{(XIII)} \quad -N_{CF} = 0 \Rightarrow N_{CF} = \boxed{0}$$

$$\text{(XV)} \quad -\mu_{FC} = 0 \Rightarrow \mu_{FC} = \boxed{0}$$

$$\text{(XVI)} \quad -N_{BG} = 0 \Rightarrow N_{BG} = \boxed{0}$$

$$\text{(XVIII)} \quad -\mu_{GB} = 0 \Rightarrow \mu_{GB} = \boxed{0}$$

$$\text{(VIII)} \quad -N_{CD} - \tfrac{1}{5}(0) - \tfrac{1}{5}(0) - 50 = 0 \Rightarrow N_{CD} = \boxed{-50}$$

$$\text{(XI)} \quad \tfrac{1}{5}(0) + \tfrac{1}{5}(0) - N_{EF} - 50 = 0 \Rightarrow N_{EF} = \boxed{-50}$$

$$\text{(XIV)} \quad (-50) - N_{FG} + \tfrac{1}{5}(0) + \tfrac{1}{5}(0) - 125 = 0 \Rightarrow N_{FG} = \boxed{-175}$$

$$\text{(XVII)} \quad (-175) - N_{GH} + \tfrac{1}{5}(0) + \tfrac{1}{5}(0) - 125 = 0 \Rightarrow N_{GH} = \boxed{-300}$$

$$\text{(V)} \quad -N_{BC} + (-50) - \tfrac{1}{5}(0) - \tfrac{1}{5}(0) - 125 = 0 \Rightarrow N_{BC} = \boxed{-175}$$

$$\text{(II)} \quad -N_{AB} + (-175) - \tfrac{1}{5}(0) - \tfrac{1}{5}(0) - 125 = 0 \Rightarrow N_{AB} = \boxed{-300}$$

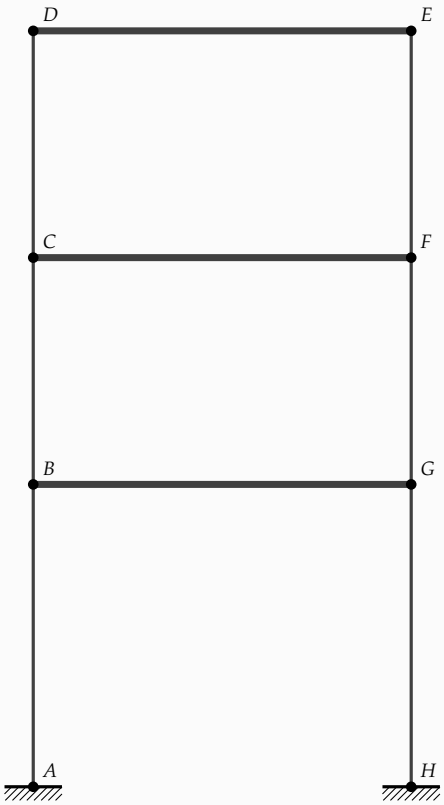
$$\text{(I)} \quad -R_1 + (0) = 0 \Rightarrow R_1 = \boxed{0}$$

$$\text{(IV)} \quad -R_2 + (0) = 0 \Rightarrow R_2 = \boxed{0}$$

$$\text{(VII)} \quad -R_3 + (0) = 0 \Rightarrow R_3 = \boxed{0}$$

Problema complementario

En el **problema complementario** solo actúan las fuerzas de fijación, ahora en el sentido de los GDL: sumadas a las del primario se anulan, y queda la estructura real con sus cargas. Como en el primario se dibujaron contrarias a los GDL, sus valores son directamente las componentes de Q; el signo dice si la fuerza va a favor del GDL (+) o en contra (−).



Problema complementario: solo las fuerzas de fijación, en su sentido real (en kN y kN m).

$$Q_j = R_j \quad \Longrightarrow \quad Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{matrix}$$

5.2 Resolución del sistema $K\,q = Q$

$$q = K^{-1}Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{matrix}$$

Y los dependientes, por sustitución en las ecuaciones de ligadura:

$q_4 = 0, \quad q_5 = 0, \quad q_6 = 0, \quad q_7 = 0, \quad q_8 = 0, \quad q_9 = 0, \quad q_{10} = 0, \quad q_{11} = 0, \quad q_{12} = 0, \quad q_{13} = 0, \quad q_{14} = 0, \quad q_{15} = 0, \quad q_{16} = 0, \quad q_{17} = 0, \quad q_{18} = 0$

Nudo	u (mm)	v (mm)	θ (rad)
A	0	0	0
B	0	0	0
C	0	0	0
D	0	0	0
E	0	0	0
F	0	0	0
G	0	0	0
H	0	0	0

Paso 6 Obtención de las fuerzas internas

6.1 Deformaciones reales de cada barra

Se deshace el camino: los desplazamientos ya calculados vuelven a pasar por la misma matriz de compatibilidad.

$$p = A\,q$$

6.2 Fuerzas de barra

Y esas deformaciones, por la rigidez del elemento, incorporando las fuerzas de empotramiento perfecto de las barras cargadas (lo que se quitó en el problema primario hay que devolverlo):

$$P = k\,p + P^0, \qquad P^0 = (\mathrm{MEP}_a,\ \mathrm{MEP}_b,\ N^0)$$

En las direcciones **restringidas** la fuerza no puede salir de $k\,p$ (allí $p \equiv 0$ y $k \to \infty$): es la **fuerza de la ligadura**, el multiplicador λ que se obtiene del residuo del equilibrio $C^T\lambda = F - K_r\,q$. Un elemento rígido no se deforma, pero sí transmite esfuerzo.

Barra	p_1 (rad)	p_2 (rad)	p_3 (m)	M_a (kN m)	M_b (kN m)	N (kN)
1	0	0	0^0	0	0	-300^λ
2	0	0	0^0	0	0	-175^λ
3	0	0	0^0	0	0	-50^λ
4	0^0	0^0	0^0	0^λ	0^λ	0^λ
5	0	0	0^0	0	0	-50^λ
6	0	0	0^0	0	0	-175^λ
7	0	0	0^0	0	0	-300^λ
8	0^0	0^0	0^0	0^λ	0^λ	0^λ
9	0^0	0^0	0^0	0^λ	0^λ	0^λ

(^{0} = deformación nula por restricción cinemática; $^\lambda$ = esfuerzo obtenido como fuerza de ligadura, no de $k\,p$.)

6.3 Fuerzas de extremo y reacciones

De (M_a, M_b, N) salen las seis fuerzas de extremo de la barra; el **cortante** lo da el equilibrio del propio elemento:

$$V_a = \frac{M_a + M_b + f^0_{eq,M_a} + f^0_{eq,M_b}}{L} - f^0_{eq,V_a}$$

Barra	N_a	V_a	M_a	N_b	V_b	M_b
1 (A–B)	300	0	0	−300	0	0
2 (B–C)	175	0	0	−175	0	0
3 (C–D)	50	0	0	−50	0	0
4 (D–E)	0	50	0	0	50	0
5 (E–F)	50	0	0	−50	0	0
6 (F–G)	175	0	0	−175	0	0
7 (G–H)	300	0	0	−300	0	0
8 (C–F)	0	125	0	0	125	0
9 (B–G)	0	125	0	0	125	0

(Fuerzas en kN, momentos en kN m, en ejes locales de cada barra.) Por equilibrio de cada nudo con apoyo, sumando las fuerzas de extremo de las barras que concurren y restando las cargas aplicadas en él. Una fuerza de extremo (N, V) en ejes locales de una barra de ángulo θ aporta al nudo, en ejes globales,

$$F_x = N\cos\theta - V\sin\theta, \qquad F_y = N\sin\theta + V\cos\theta$$

y la reacción es la suma de las de todas las barras del nudo menos la carga aplicada en él: $R_x = \sum F_x - P_x$, $R_y = \sum F_y - P_y$, $R_M = \sum M - M_{\text{ap}}$.

Nudo A Concurren la barra 1 ($\theta = 90°$).

$$R_{Ax} = 300\cdot 0 - 0\cdot 1 = \boxed{0\ \text{kN}}$$

$$R_{Ay} = 300\cdot 1 + 0\cdot 0 = \boxed{300\ \text{kN}}$$

$$R_{AM} = 0 = \boxed{0\ \text{kN m}}$$

Nudo H Concurren la barra 7 ($\theta = -90°$).

$$R_{Hx} = (-300)\cdot 0 - 0\cdot(-1) = \boxed{0\ \text{kN}}$$

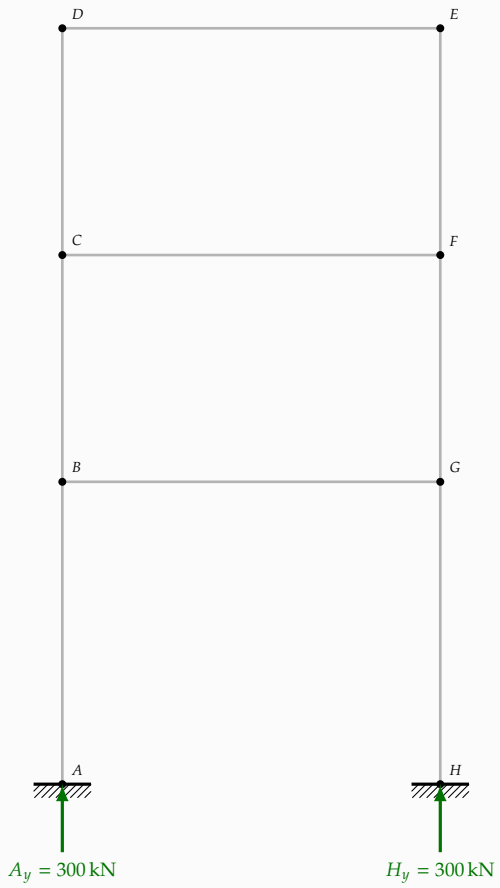
$$R_{Hy} = (-300)\cdot(-1) + 0\cdot 0 = \boxed{300\ \text{kN}}$$

$$R_{HM} = 0 = \boxed{0\ \text{kN m}}$$

Resumen de reacciones

Nudo	$\cdot_x$ (kN)	$\cdot_y$ (kN)	$M.$ (kN m)
A	0	300	0
H	0	300	0

Cada fila es un nudo: las suyas son A_x (horizontal), A_y (vertical) y M_A (momento) si el nudo se llama A.



Reacciones en los apoyos (kN y kN m).

Verificación del equilibrio

$$\sum F_x : \; 0 + (0) = 0 \approx 0, \qquad \sum F_y : \; 600 + (-600) = 0 \approx 0$$

Residuo máximo del equilibrio nodal en los GDL sin apoyo: 0 (relativo). La solución cumple el equilibrio de todos los nudos, que es la comprobación de que las ligaduras se han impuesto correctamente.

Diagramas de fuerzas internas

Esfuerzo axial N, fuerza cortante V y momento flector M

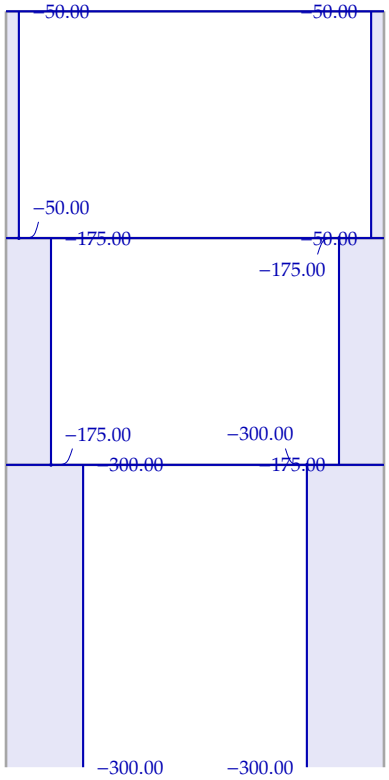


Diagrama de fuerza axial (N), en kN.

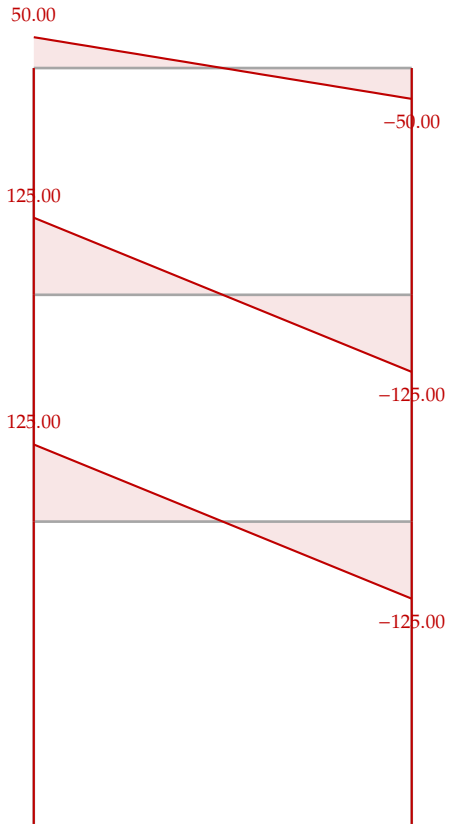


Diagrama de fuerza cortante (V), en kN.

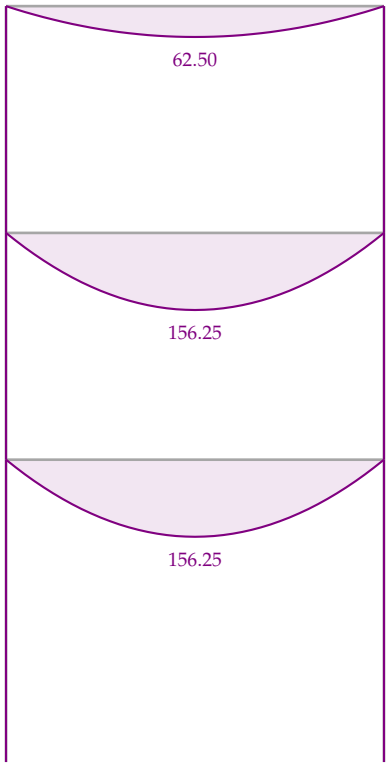


Diagrama de momento flector (M), en kN m.